

Cours de supraconductivité

M2-Physique

Introduction

- o 1908 : Leiden, Hollande, Groupe de H. Onnes : liquéfaction de l'Hélium
→ comportement de la résistivité des métaux pour $T \rightarrow 0$
- o 1911 : son étudiant (G. Holst) est chargé de mesurer le mercure (qui peut être obtenu dans un état très pur) et remarque que la résistance disparaît juste au-dessus de 4K (**$R=0$**). Cette découverte est confirmée en 1912 dans l'étain (3.7K) puis le plomb (7.2K) : Prix Nobel en 1913.
- o 1933 : Berlin, Meissner et Ochsenfeld mettent en évidence l'expulsion totale du champ magnétique (**$B=0$**) : phénomène de lévitation.
- o 1934 : théorie électromagnétique : LONDON, basée sur les équations de Maxwell + $B=0/R=0$, prédit l'existence d'une longueur de pénétration.
- o 1950 : théorie des transitions de phases : GINZBURG-LANDAU, prédit l'existence d'une seconde échelle de longueur : longueur de cohérence → état mixte (Abrikosov).
- o 1955 : théorie *microscopique* BCS : rôle des phonons.

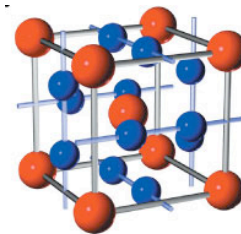
Quelques applications :

- $R=0$: lignes de transport, aimants supraconducteurs, limiteurs de courant (fusibles)
- $B=0$: blindages magnétiques, train à lévitation
- Cohérences : SQUID (mesure de M), détecteurs micro-ondes

Matériaux

★ Corps purs (sauf Cu,...) : supraconducteurs de type I (sauf Nb, V, Tc), $T_c \leq 10K$

- ★ Alliages : A15 (β -tungstène) : A_3B
- B sommet et centre du cube
 - A par groupe de 2 sur les faces.
- V_3Al : 9.6K → **Nb_3Ge : 23.2K**

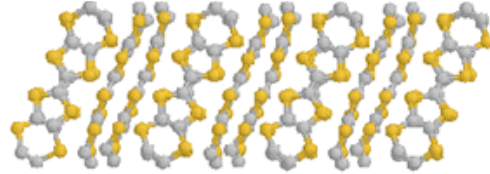


★ Phases de Laves ($C15 : AB_2$) : ZrV_2 : 9.6K.

★ Phases de Chevrel $M_xMo_6X_8$ $X=S, Se, Te$ (chalcogénure), $M=Sn, Pb, La$: $PbMo_6S_8$: 15K.

★ Organiques (fortement bidimensionnels)
BEDT-TTF- $Cu(CNS)_2$ ~ 10K.

★ Fullerenes, boules de carbone C_{60} aux sommets d'une structure cubique, dopage en alcalin (interstitiels) : A_3C_{60} (CS_2Rb) C_{60} : 33K (1991) (voir aussi diamant dopé ci-dessous).



★ Oxydes : $(Ba, La)_2CuO_4$: Bednorz/Muller 1986 (30K).

$La_{1.85}Sr_{0.15}CuO_4$: 40K,

$YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$: 92K,

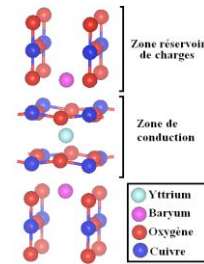
$Bi_2Sr_2Ca_2Cu_3O_{10}$: 110K,

et même $Hg_{0.8}Tl_{0.2}Ba_2Ca_2Cu_3O_{8.3}$: 138K

Des traces de supraconductivité ont été reporté dans $(Sn_{1.0}Pb_{0.5}In_{0.5})Ba_4Tm_5Cu_7O_{20}$ à.... 185K le 6 Mars 2008, ce qui place cette T_c 1K au dessus de la température la plus basse relevée en antarctique (le 21 juillet 1983) : il s'agirait donc du premier supraconducteur à température ambiante....

Tous ces systèmes ont une structure fortement lamellaire : plans CuO_2 supraconducteurs + mécanisme non BCS (non encore déterminé).

A noter aussi $(K, Ba)BiO_3$: 32K cubique, sommet Bi+octaèdre O, centre du cube K, Ba



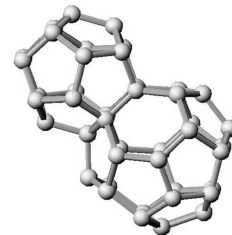
★ Fermions lourds : Ce ou Uranides (U,...), bande d très étroite fortement hybridée aux électrons de conduction (Pt, Be) : $m^*/m \sim 200$, UPt_3 : 1.5K.

★ MgB_2 : plans hexagonaux B (de type graphite) : orbitales p_z (π) et p_{xy} : liaisons covalentes sp^2 (σ). dopage des liaisons σ par Mg^{2+} (interplans) : ces liaisons deviennent alors supraconductrices avec un excellent couplage e-phonons : $T_c = 39K$

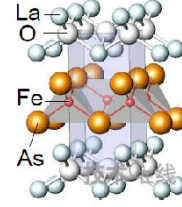
les liaisons π sont elles aussi supraconductrices (mais avec $T_c = 10K$) : coexistence de 2 supraconducteurs (faiblement couplés).

Des calculs ab-initio dans d'autres systmes suggèrent que la T_c pourrait dpasser plusieurs 10 aines de K par dopage des laisons σ sp^2 : BC_3 : $> 40K$, Li_xBC : $> 150K$

★ Diamant dopé au B : la encore des orbitales σ mais en configuration sp^3 (qq K mais aussi Si:B : $T_c \sim 0.7K$). La T_c pourrait la encore être très fortement augmentée pour dépasser 50K dans BC (Wurtzite). La diffuculté réside ici dans le dopage de ces liaisons covalentes et de très fortes valeurs de T_c ont été prédite dans des systèmes de type "cage" : clathrates de Carbone ($F:C_{34}$, 7K déjà observée dans les clathrates de Si).



★ La découverte très récente (printemps 2008) de $T_c > 50\text{K}$ dans les oxypnictide de Fer : $\text{X}(\text{O},\text{F})\text{FeAs}$ où X est un Lanthanide : La, Sm, Nd, fait l'objet de très nombreux travaux.
Plans supraconducteurs : FeAs, contenant un élément magnétique et réservoir de charge : XO dopé par substitution de F sur le site de l'oxygène.



Modèle de London

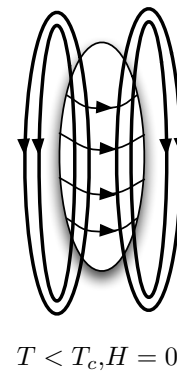
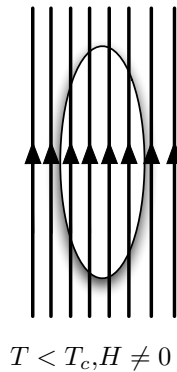
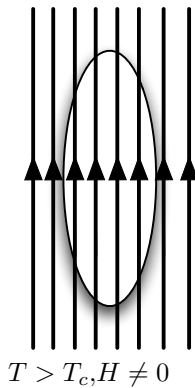
Ce modèle est basé sur les équations de Maxwell

$$\begin{aligned}\vec{\text{rot}}\vec{E} &= -\partial\vec{B}/\partial t \\ \text{div}\vec{E} &= \rho/\epsilon_0 \\ \text{div}\vec{B} &= 0 \\ \vec{\text{rot}}\vec{B} &= \mu_0\vec{J}\end{aligned}$$

et $\vec{J} = -nq\vec{v}$ (pour une charge -q) où n est la densité de porteurs (et $\text{div}(\rho\vec{v}) + \partial\rho/\partial t = 0$, conservation de la masse). Dans un métal normal \rightarrow existence d'une force de frottement (diffusion par les impuretés et les phonons) : $\vec{f}_F = -(m/\tau)\vec{v}$. Pour $t \gg \tau$ (régime continu) $\vec{v} = (-q\tau/m)\vec{E}$, $\vec{J} = (nq^2\tau/m)\vec{E}$ et $\sigma = nq^2\tau/m$.

A priori un conducteur parfait ($\sigma \rightarrow \infty$) est caractérisé par $\vec{E} = \vec{0}$ et ce conducteur parfait "s'oppose" alors à toute variation de flux \rightarrow génération d'un courant d'écrantage :

conducteur parfait, $B = \text{cte}$; $\partial B/\partial t = 0$



Néanmoins, il faut écrire : $-q\vec{E} = m \times d\vec{v}/dt$ et :

$$\boxed{d\vec{J}/dt = (nq^2/m)\vec{E}}$$

soit $\vec{r}\partial(\partial\vec{B}/\partial t) = \mu_0\partial\vec{J}/\partial t = \mu_0(nq^2/m)\vec{E}$
 $\vec{r}\partial(\vec{r}\partial(\partial\vec{B}/\partial t)) = \vec{grad}(\text{div}(\partial\vec{B}/\partial t)) - \Delta(\partial\vec{B}/\partial t) = 0 - \Delta(\partial\vec{B}/\partial t) = \mu_0(nq^2/m)\vec{r}\partial\vec{E} = -1/\lambda_L^2 \vec{r}\partial(\partial\vec{B}/\partial t)$

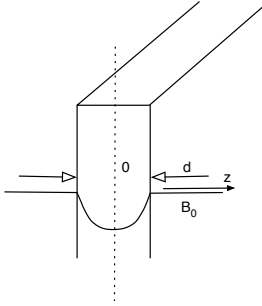
avec

$$\boxed{\lambda_L^2 = \frac{m}{\mu_0 n q^2}}$$

Mais un supraconducteur n'est pas simplement un conducteur parfait, il possède également la propriété de pouvoir **EXPULSER** le champ et donc $\vec{B} = \vec{0}$ (et non pas $(\partial\vec{B}/\partial t)$). On peut (voir ci-dessous) donc r"emplacer" $\partial\vec{B}/\partial t$ par \vec{B} dans l'équation ci-dessus et

$$\rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \Delta\vec{B} = \vec{B}/\lambda_L^2 \\ \Delta\vec{J} = \vec{J}/\lambda_L^2 \end{array}} \rightarrow \boxed{\mu_0 \vec{r}\partial\vec{J} = \vec{B}/\lambda_L^2} \quad \text{Eq. de LONDON}$$

Remarque : systèmes dissipatifs : $\vec{J} = \sigma\vec{E}$, $\Delta\vec{J} = \sigma\mu_0\partial\vec{J}/\partial t \rightarrow$ épaisseur de peau $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma\omega}}$

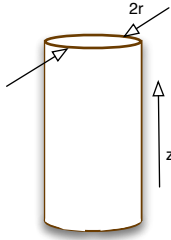


$$B = \frac{ch(z/\lambda_L)}{ch(d/\lambda_L)}$$

$$\mu_0 M = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} B(z) dz - \mu_0 H = -B_0 \left(1 - \frac{2\lambda_L}{d} \text{th}\left(\frac{2\lambda_L}{d}\right)\right)$$

$$d \ll \lambda_L, \chi = dM/dH = -(d/2\lambda_L)^2 \text{ et}$$

$$d \gg \lambda_L, \chi = -1 \left(1 - (d/\lambda_L)\right)$$



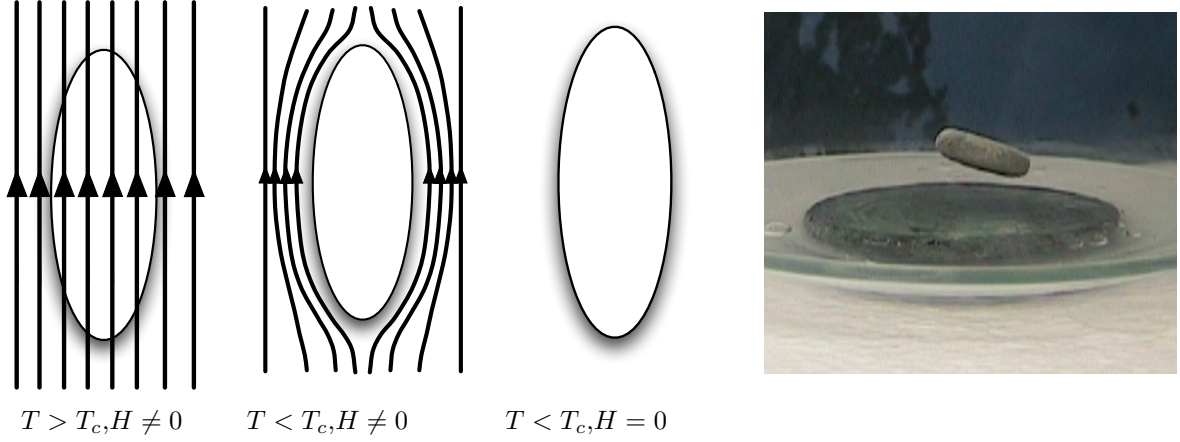
$$\partial^2 B_z / \partial r^2 + 1/r \cdot \partial B_z / \partial r - 1/\lambda_L^2 B_z = 0$$

$$\rightarrow B_z = B_0 \cdot \frac{I_0(r/\lambda_L)}{I_0(R/\lambda_L)}$$

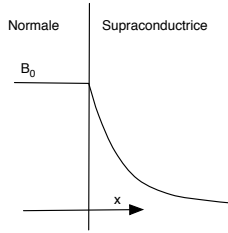
où I_0 est la fonction de Bessel d'ordre zero $\sim e^x/x$ pour $x \rightarrow \infty$

remarque : même équation pour \vec{J} donc un courant de transport ne circule que sur une épaisseur λ_L

Lorsque le supraconducteur est refroidi sous champ en dessous de sa température critique, il y a expulsion du flux : effet Meissner \rightarrow LEVITATION



• Aspect énergétique



On suppose que $B = B_0 e^{-x/L}$

Energie magnétique : $E_{mag} = \frac{1}{2\mu_0} \int_0^\infty B^2 d\tau = \frac{1}{2\mu_0} \int_0^\infty B^2 dx \times S$; soit

$$E_{mag} \sim LS \times B^2 / 4\mu_0$$

$$\text{et } J = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B}{\partial x} = \frac{B_0}{\mu_0 L} e^{-x/L}$$

→ Energie cinétique : $E_{cin} = \frac{m}{2} \int_0^\infty v^2 n d\tau = \frac{m}{2nq^2} \int_0^\infty J^2 dx \times S$; soit

$$E_{cin} \sim SB^2 m / 4nq^2 L \mu_0$$

$$\partial(E_{mag} + E_{cin}) / \partial L |_{L=\lambda_L} = 0 \rightarrow \boxed{\lambda_L^2 = \frac{m}{\mu_0 n q^2}}$$

La longueur de London permet donc au système de minimiser l'énergie totale (magnétique + cinétique).

retour sur l'équation du mouvement; le calcul en page 4 est évidemment faux ! Il faut en fait écrire :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad} v^2 - \vec{v} \times \text{rot} \vec{v} \text{ et } \text{rot} \text{grad} v^2 = 0, \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, m \frac{d\vec{v}}{dt} = -q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\text{d'où } \frac{\partial \text{rot} \vec{v}}{\partial t} - \text{rot}(\vec{v} \times \text{rot} \vec{v}) = \frac{-q}{m} (\text{rot}(\vec{E}) + \text{rot}(\vec{v} \times \vec{B})) = \frac{-q}{m} (-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot}(\vec{v} \times \vec{B})) \text{ soit :}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} &= \text{rot}(\vec{v} \times \vec{\omega}) \\ \vec{\omega} &= \text{rot} \vec{v} + \frac{-q \vec{B}}{m} \end{aligned}}$$

Eq Helmholtz

remarque Eq. Helmholtz traduit l'évolution d'un fluide non visqueux en mécanique des fluides = liquide de Fermi sans viscosité. C'est bien sur le cas des supraconducteurs mais plus généralement de tout conducteur parfait (si un tel système existait) et cette équation se substitue alors à $\Delta \vec{J} = \sigma \mu_0 \partial \vec{J} / \partial t$ pour un conducteur "normal". Le supraconducteur correspond à la solution particulière : $\omega_{INIT} = 0$ et donc $\partial \omega / \partial t = 0$ et ω reste nul [c'est bien la solution qui correspond à $B=0$ au centre de l'échantillon].

Soit $\boxed{\vec{r}\vec{\text{rot}}\vec{v} - q\vec{B}/m = \vec{0}}$ Eq. de London.

remarque sur les jauge : Cette équation de London s'écrit $\vec{r}\vec{\text{rot}}(\vec{J} + \frac{1}{\mu_0\lambda_L^2}\vec{A}) = \vec{0}$ (en introduisant $\vec{B} = \vec{r}\vec{\text{rot}}\vec{A}$) soit $\vec{J} = \frac{nq^2}{m}(g\vec{r}\vec{\text{ad}}\chi - \vec{A})$ où χ est une fonction scalaire quelconque. \vec{A} et V sont définis à une "constante près" : les lois physique ne sont pas changés si on remplace $V \rightarrow V + \partial\chi/\partial t$ et $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$. On introduit la jauge de London : $\vec{A} \cdot \vec{n} = 0$ et $\text{div}\vec{A} = 0$ et on peut montrer que dans ce cas, pour un système simplement connexe (sans trous) : $g\vec{r}\vec{\text{ad}}\chi = 0$ soit $\boxed{\vec{J} = -\frac{nq^2}{m}\vec{A}}$. En mécanique quantique on définit l'impulsion généralisée : $\vec{P} = m\vec{v} - q\vec{A}$ et on remarque donc la jauge de London est celle pour laquelle l'impulsion $\boxed{\vec{P} = \vec{0}}$ dans un supraconducteur.

• Champ critique, rappels thermodynamiques

Champ magnétique crée par un solénoïde : $H = n_s i$ (où n_s est le nombre de spires par mètre) $\rightarrow \Phi = n_s L B_a S \rightarrow$ apparition d'une f.e.m. $e = -d\Phi/dt \rightarrow \delta W_{\text{solénoïde}} = -ei\delta t = H\delta B_a V = \mu_0 H \delta H V$.

$du = Tds + HdB$: matière + solénoïde (énergie par unité de volume, on suppose pour simplifier qu'il n'y a pas d'effets démagnétisants ($H = H_a$) mais le résultat est général).

Si on considère uniquement la matière, il faut retrancher $\delta W_{\text{solénoïde}}$, soit : $du = Tds + HdB - \mu_0 H dH = Tds + \mu_0 H dm$ (où m est l'aimantation : $B = \mu_0(M + H)$). On a donc :

	Matière seule	Matière + solénoïde
énergie : u	$du = Tds + \mu_0 H dM$	$dU = Tds + HdB$
enthalpie libre (Gibbs): g	$g = u - Ts - \mu_0 HM$ $dg = -sdT - \mu_0 M dH$	$g = u - Ts - HB$ $dg = -sdT - BdH$

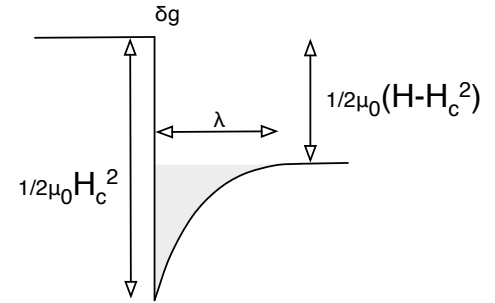
L'état normal est supposé non magnétique : $M = 0$ ($B = \mu_0 H$) et pour le supraconducteur : $B = 0$ ($M = -H$) et on a :

Matière seule		Matière + solénoïde	
g_N	g_S	g_N	g_S
$g_0^N = g_N(T, H = 0)$	$g_0^S(T) + \frac{1}{2}\mu_0 H^2$	$g_0^N(T) - \frac{1}{2}\mu_0 H^2$	$g_0^S = g_S(T, H = 0)$

L'écrantage a donc un coût énergétique ($\mu_0 H^2/2$) (mise en mouvement des supercourants). La phase supraconductrice est stable pour $\boxed{H < H_c = \sqrt{\frac{2}{\mu_0}(g_0^N - g_0^S)}}$ i.e. $g_N > g_S$

• Energie libre de surface

$\delta g = g^S - g^N = \frac{\mu_0}{2}(H^2 - H_c^2)$ mais la condition $m = -H$ n'est pas réalisée à la surface de l'échantillon. En supposant que $B = B_0 e^{-x/\lambda_L}$ on a $M = H(e^{-x/\lambda_L} - 1) \rightarrow$ la surface STABILISE la phase supraconductrice.

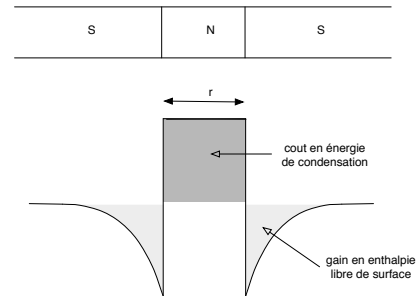


première approche des vortex : est-il energetiquement favorable de créer une "zone" normale au sein du supraconducteur ?

Un tube de phase normale (de rayon r) sera stable si le gain en enthalpie libre de surface est supérieur au cout en énergie de condensation:

$$\pi((r + \lambda_L)^2 - r^2)\mu_0 H^2/4 > \pi r^2 \mu_0 (H_c^2 - H^2)/2$$

i.e. si $H \geq H^* \sim \frac{\sqrt{2}r}{r + \lambda_L} H_c$



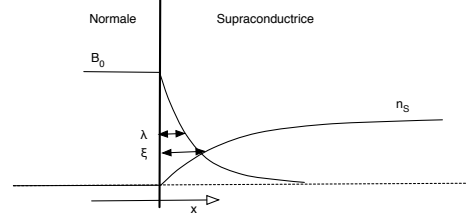
De tels filaments de phases normales existe dans certain supraconducteur - dits de type II - mais pas tous (les autres sont dits de type I) \rightarrow on les appelle VORTEX car le coeur normal est entouré d'un "tourbillon" de courant, on verra que chaque vortex porte un quantum de flux $\Phi_0 = h/2e = 2.10^{-15} Tm^2$ (voir ci-dessous)

Théorie de Ginzburg-Landau

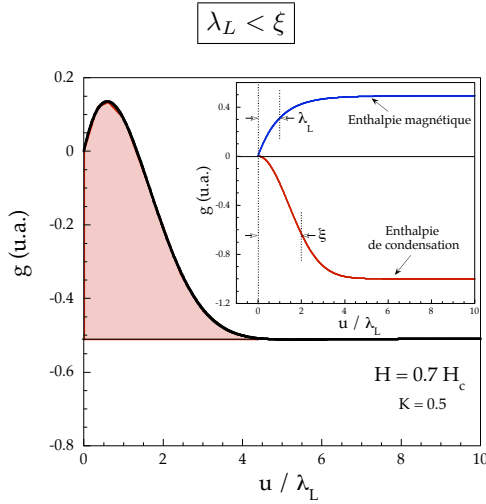
La question se pose alors est de savoir pourquoi il existe des supraconducteurs de type I ? Il faut une enthalpie libre positive pour contrebalancer l'effet négatif du "défaut d'aimantation" sur l'épaisseur de London.

\rightarrow le passage entre l'état normal et l'état supraconducteur n'est pas abrupte : la densité de porteurs dans l'état supraconducteur (n_S) ne s'établit que sur une longueur ξ appelé longueur de cohérence.

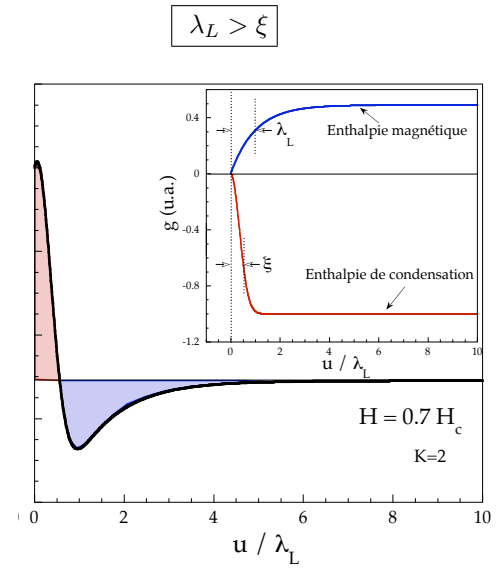
$$\begin{aligned}\delta g &= \frac{\mu_0}{2}(H^2 - H_c^2) = \delta g_m + \delta g_c \\ \delta g_c &\sim -mu_0 \frac{H_c^2}{2} \left(\frac{n(x)}{n_s}\right)^2 \\ &\quad : \text{énergie de condensation} \\ \delta g_m &\sim \mu_0 \frac{H^2}{2} (1 - e^{-x/\lambda_L}) : \text{énergie magnétique}\end{aligned}$$



2 cas sont alors possibles :



→ il n'existe pas d'enthalpie libre négative associée à la surface : type I



→ il existe une enthalpie libre négative associée à la surface : type II

Le calcul exact (non démontré ici) place la limite à $\kappa = \frac{\lambda_L}{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Transition de phase entre l'état normal et l'état supraconducteur.

GL traite la transition supraconductrice comme toute transition de phase. Une transition de phases est une modification des propriétés du système induite par la variation d'un paramètre extérieur. Elle intervient lorsque le potentiel thermodynamique **n'est pas analytique**. Ehrenfest proposa une classification des transitions de phases en fonction du *degré de non analytité* : une transition est du n^{eme} ordre lorsqu'une dérivée n^{eme} du potentiel est discontinue. Néanmoins cette définition ne prend pas en compte la possibilité de divergence d'une dérivée (mais uniquement les discontinuités). Cette divergence est néanmoins présente dans la nature : transition superfluide de l'Hélium 4 au point λ (2.17K, appelé ainsi du fait de la forme de la courbe $C_p(T)$).

On distingue aujourd'hui 2 type de transition (1^{er} ou second ordre) en fonction de l'existence ou non d'une **chaleur latente** ($T\Delta S$, attention néanmoins à la relation de Clapeyron : $\Delta S = -(\partial P/\partial T)\Delta V = V(\partial H/\partial T)\Delta M$ s'annule si $\partial P/\partial T$ ou $\partial H/\partial T$ ou toute autre dérivée s'annule). Les transition du 2^{eme}

ordre sont plus facile à décrire du fait de l'absence de discontinuité des propriétés. Il est alors possible d'introduire des *exposants critiques* permettant de décrire l'évolution des propriétés au voisinage de la température de transition (T_c) : $X \propto (T - T_c)^\alpha$. L'ensemble de ces exposants définit la classe d'universalité de la transition.

Généralement une transition de phase s'accompagne d'une rupture de symétrie. Landau introduit alors une variable supplémentaire permettant de tenir compte de cette rupture : le **paramètre d'ordre**.

A titre d'exemple on peut citer

(i) transition liquide/solide Ψ = densité

(i) transition ferro/para $\Psi = M_s$ (aimantation spontanée)

(iii) alliage équiatomique AB cristallisant en structure cubique centrée

on note C_A^α la concentration de A aux sommets des cubes (position α) (resp. C_B^α)

on note C_A^β la concentration de A au centre des cubes (position β) (resp. C_B^β)

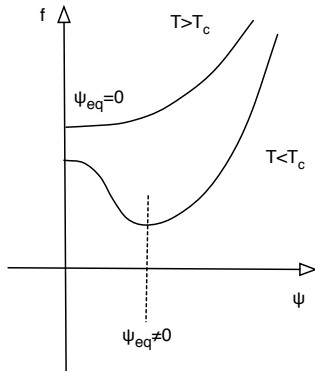
on peut noter $C_A^\alpha = \frac{1-\Psi}{2}$ ($= C_B^\beta$) et respectivement $C_A^\beta = \frac{1+\Psi}{2}$ ($= C_B^\alpha$) : $\Psi = C_A^\beta - C_A^\alpha$

Ψ représente alors l'ordre chimique i.e. si $\Psi = 0$ les éléments A et B sont aléatoires en site α et β (sommets et centres) et si $\Psi = 1$ l'alliage est parfaitement ordonné avec A en position α et B en position β .

Il s'agit donc de définir un paramètre d'ordre Ψ pour la transition normal/supra. On le supposera nul dans l'état normal et $\neq 0$ dans la phase supraconductrice.

remarque Cette transition est du second ordre (en champ nul) et le paramètre d'ordre s'annule alors de façon continue. Dans ce type de transition il n'y a pas de "séparation de phase" type surfusion mais les fluctuations spatiales et temporelles peuvent être grandes au voisinage de T_c

Dans le cas de la transition supraconductrice Landau définit un paramètre d'ordre complexe :



$$\Psi = |\Psi|e^{i\theta} \text{ avec } |\Psi| = \sqrt{n_s}$$

Landau → développement de l'énergie libre en :

$$f(\Psi) = f_0 + \alpha.\Psi^2 + \frac{1}{2}\beta.\Psi^4 \text{ avec } \alpha = a(T - T_c)$$

Remarque : les termes impaires ne sont présents que pour une transition du 1^{er} ordre

Pour tenir compte des fluctuations spatiales du paramètre d'ordre on introduit un terme supplémentaire : $\gamma.[\nabla\Psi]^2$ en M.Q. $\nabla\Psi \equiv \frac{i}{\hbar}p.\Psi$, p = opérateur impulsion. Ce terme correspond en fait l'énergie cinétique des "paires" supraconductrices (la notion de paire sera définie plus tard) : $\gamma \equiv \frac{\hbar^2}{2m}$.

Enfin en présence d'un champ magnétique il faut :

(i) tenir compte de l'énergie magnétique $\frac{B^2}{2\mu_0}$ (matière + solénoïde)

(ii) remplacer $\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$ par $\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - q\vec{A}$ (charge -q), d'où :

$$\rightarrow f_s = f_n + \underbrace{\alpha|\Psi|^2 + \frac{1}{2}\beta|\Psi|^4 + \frac{1}{2m}\left[\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\Psi - q\vec{A}\Psi\right]^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}}_{[\dots]} \quad \text{matière + solénoïde}$$

Enfin comme les variables du système sont T et H (et non pas S et B), on passe à l'enthalpie libre $g=f-BH$ et $g_s = f_n + [\dots] + 0$ et $g_n = f_n - \frac{\mu_0 H^2}{2}$.

remarque : pour la matière seule on doit retrancher l'énergie du solénoïde $\frac{\mu_0 H^2}{2}$ et $g = f - \mu_0 H m$, on trouve donc $g_s = f_n + [\dots] + \frac{\mu_0 H^2}{2}$ et $g_n = f_n$ soit le même Δg .

En minimisant $\int \int_{volume} \delta g(\Psi(r)) d^3 r$ on trouve [après un long calcul...] :

$$\begin{cases} \alpha\Psi + \beta\Psi|\Psi|^2 + \frac{1}{2m}\left[\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\Psi - q\vec{A}\right]^2\Psi = 0 \\ \vec{J} = \frac{i\hbar q}{2m}[\Psi\vec{\nabla}\Psi^* - \Psi^*\vec{\nabla}\Psi] - \frac{q^2\vec{A}}{m}|\Psi|^2 \end{cases} \quad \text{Eq. Ginzburg-Landau}$$

champ nul on considère une interface plane : $\Psi(x)$ et en l'absence de courant ($J = 0$) $[\Psi\nabla\Psi^* - \Psi^*\nabla\Psi] = 0$ donc Ψ est réel. On pose $y = \sqrt{\frac{\beta}{|\alpha|}}\Psi$. La première équation de GL s'écrit alors : $\Psi + \frac{\beta}{\alpha}\Psi - \frac{\hbar^2}{2m\alpha}\frac{d^2\Psi}{dx^2} = 0$ i.e. $\frac{\hbar^2}{2m|\alpha|}\frac{d^2 y}{dx^2} + y(1 - y^2) = 0$. Soit $y = th(\frac{x}{\sqrt{2}\xi})$ avec $\xi^2 = \frac{\hbar^2}{2m|\alpha|}$.

• TD 1

Exercice (extrait partiel 2006)

- 1) On suppose que la densité de paires est uniforme et on note $\Psi = |\Psi|e^{i\theta(r)}$. Que deviennent les équations (GL1) et (GL2) dans ce cas. On rappelle que dans la jauge de London : $\left[\frac{\hbar}{i}\nabla - q\vec{A}\right]^2\Psi \rightarrow (\hbar\nabla\theta - qA)^2\Psi$
- 2) On suppose que le supraconducteur est parcouru par un courant J, soit v_s la vitesse correspondante des paires supraconductrices. Montrer que : $\alpha + \beta|\mu|^2 + \frac{1}{2}mv_s^2 = 0$
- 3) On note $|\Psi_\infty| = -\alpha/\beta$ et $y = |\Psi|/|\Psi_\infty|$, montrer que : $J = \frac{\hbar}{\mu_0 q \lambda^2 \xi} y^2 \sqrt{1 - y^2}$
- 4) Quelle est la signification physique de λ (profondeur de pénétration) et ξ (longueur de cohérence).
- 5) Tracer $J(y)$ et en déduire la valeur J_c maximale pouvant circuler dans le matériau.

densité uniforme de paires : $|\Psi| = cte$; $\Psi = |\Psi|e^{i\theta(r)} \rightarrow \nabla\Psi = i\nabla\theta\Psi$. Les équations de GL deviennent

$$\begin{cases} \alpha\Psi + \beta\Psi|\Psi|^2 + \frac{1}{2m}\overbrace{[\hbar\vec{\nabla}\theta - q\vec{A}]^2}^{1/2mv_s^2}\Psi = 0 & GL1 \\ \vec{J} = \underbrace{\frac{q}{m}|\Psi|^2}_n \underbrace{[\hbar\vec{\nabla}\theta - q\vec{A}]}_{mv_s} & GL2 \end{cases}$$

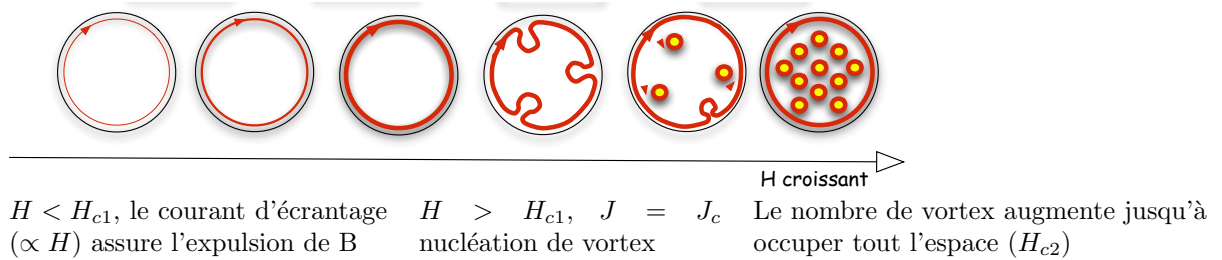
Cette deuxième équation est à comparé à : $\vec{J} = \frac{nq^2}{m}(\vec{\nabla}\chi - \vec{A})$ (modèle de London). GL donne donc que

$\chi \equiv \frac{\hbar}{q}\theta$, un changement de Jauge est donc équivalent à un changement de phase de la fonction d'onde.

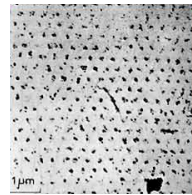
Au coeur du matériau, $v_s = 0$ $\alpha + \beta|\Psi_\infty|^2 = 0$ soit $|\Psi_\infty|^2 = -\frac{\alpha}{\beta} = n_s = \frac{m}{\mu_0 q^2 \lambda_L^2}$ soit $\boxed{\beta = \frac{\mu_0}{2} \left(\frac{\hbar \lambda_L q}{m \xi} \right)^2}$
 et $(g_s - g_n)(0) = \alpha|\Psi_\infty|^2 + \frac{\beta}{2}|\Psi_\infty|^4 = -\frac{\alpha^2}{2\beta} = -\frac{\mu_0 H_c^2}{2}$

d'où $\boxed{H_c = \frac{\hbar}{\sqrt{2}\mu_0 q \xi \lambda_L} = \frac{\Phi_0}{2\pi\sqrt{2}\mu_0 \xi \lambda_L}}$ avec $\Phi_0 = \frac{\hbar}{q}$.

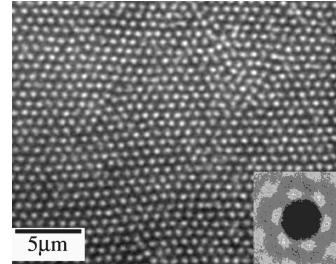
état mixte : Nous avons vu que dans les supraconducteurs dits de type II, il est énergétiquement favorable de créer un vortex pour $H > H^*$ (voir si dessous pour la définition précise de H^* appelé H_{c1}). En effet, en présence d'un champ extérieur le supraconducteur "créé" un courant ($\sim H/\lambda_L$) permettant d'écranter le champ extérieur mais J ne peut pas excéder J_c et au delà de H_{c1} le supraconducteur "autorise" la pénétration partielle de B sous la forme de tubes de flux entourés de courants (assurant l'écrantage de B en dehors du tube) appelés VORTEX. Il y a donc coexistence des phases supraconductrice et normale, cet état est appelé état mixte. Comme Φ s'annule au centre du vortex, la taille de son coeur normal $\sim 2\xi$ (pour minimiser le coût en énergie de condensation) le coeur doit minimiser sa taille (phase normal) alors que sa "taille magnétique" est $\sim 2\lambda_L$.



La prédiction théorique des vortex a été faite par A.A.Abrikosov en 1957 - 1^{ere} preuve expérimentale : U.Essmann (1967).

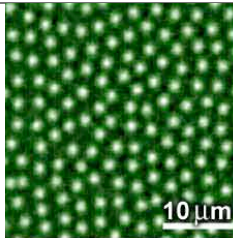
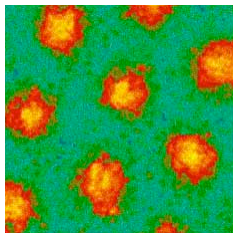
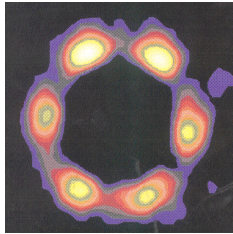


décoration Bitter
 (pulvérisation de poudre magnétique
 sur la surface) - Pb : 1.1K - 195G.



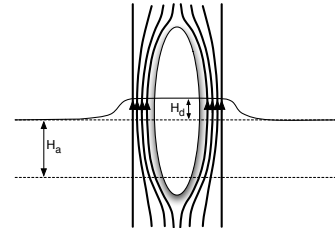
→ NbSe₂ - 4K - 36G

Aujourd'hui plusieurs autres techniques permettent de "visualiser" les vortex :

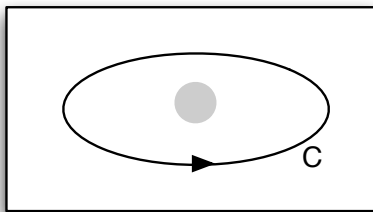
Technique	Mesures magnétiques Microscopie à : - force magnétique - sonde de Hall - microSQUID - Lorentz - magnéto-optique	Spectroscopie tunnel	Diffraction de neutrons
sensible à	λ_L	ξ	structure
gamme de champ	qqG \rightarrow ~ 100 G	qq100G \rightarrow qq1000G	qq100G \rightarrow qqT
distance intervortex	$\sim \mu\text{m}$	qq100Å	qq10Å - 100Å
			

remarque des inclusions de phase normale au sein de la matrice supraconductrice peuvent apparaître même dans les supraconducteurs de type I (état intermédiaire) mais elles sont liées aux effets "dé" magnétisants (effet géométriques). $H = H_a + H_d$ et $H_d = -NM$, $M = -H \rightarrow H = \frac{H_a}{1-N} > H_a$

pour les échantillons de forme elliptique la condition $H = H_c$ est remplie simultanément en tout point de la surface mais ceci n'est pas vrai pour un échantillon de forme quelconque (pour lequel M n'est plus uniforme) \rightarrow cette condition est alors remplie localement induisant en cet endroit la formation de phase normale mais de taille \gg taille des vortex des supraconducteurs de type II (de l'ordre de qq 10 – 100Å).



Quantification du flux



sur un contour fermé $\Delta\theta = 2n\pi = \oint_C \frac{m}{nq\hbar} J dl + \oint_C \frac{qA}{\hbar} dl$
loin du coeur $J = 0$, $2n\pi = \oint_C \frac{qA}{\hbar} dl = \frac{q}{\hbar} \int_S B dS = \frac{q}{\hbar} \Phi$
 $\Phi = n\Phi_0$ avec $\Phi_0 = \frac{h}{q}$, en fait on peut montrer que $n = 1$
il est énergétiquement plus favorable de créer deux vortex avec $n=1$ qu'une seul avec $n=2$
on mesure $\Phi_0 = 2.10^{-15} Tm^2$ soit $q = 2e$: paire...

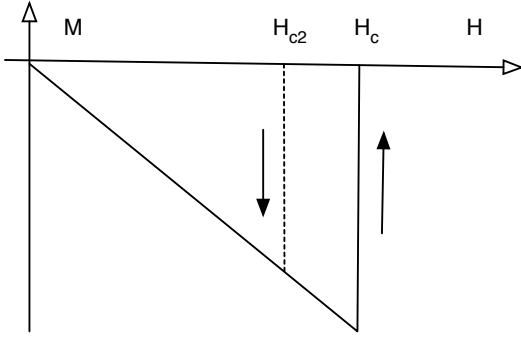
La quantification du flux implique que le nombre de vortex augmente avec H : $B.S = n\Phi_0$ soit $n/S =$

$B/\Phi_0 = \alpha/a_0^2$ où a_0 est la distance inter-vortex et α est coefficient numérique dépendant de la symétrie du réseau de vortex. Généralement le réseau de vortex est hexagonal (le réseau carré a une énergie très légèrement supérieure et peut exister dans certains composés) et $\alpha = 2/\sqrt{3}$. La supraconductivité est totalement détruite lorsque les vortex finissent par occuper tout l'échantillon ($a_0 \sim 2\xi$) et on peut estimer $B_{c2} \sim \frac{\Phi_0}{2\sqrt{3}\xi^2}$.

On peut calculer la valeur exacte à partir du modèle de GL. Près de H_{c2} $|\Psi|^2 \approx 0$, on peut donc négliger le terme en $\beta\Psi|\Psi|^2$ et $\rightarrow \alpha\Psi + \frac{1}{2m}[\frac{\hbar}{i}\nabla - qA]^2\Psi = 0$. GL est donc équivalent à l'équation de Schroedinger d'une particule dans un champ magnétique \rightarrow solution = NIVEAUX DE LANDAU ($-\alpha = E$)

$$B = \mu_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ H \end{pmatrix}, A = \mu_0 \begin{pmatrix} 0 \\ Hx \\ 0 \end{pmatrix}, \rightarrow \boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi - \frac{iq\hbar Bx}{m}\frac{d\Psi}{dy} + \underbrace{\frac{q^2 B^2 x^2}{2m}}_{\frac{1}{2}kx^2} = \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m\xi^2}}_E \Psi}$$

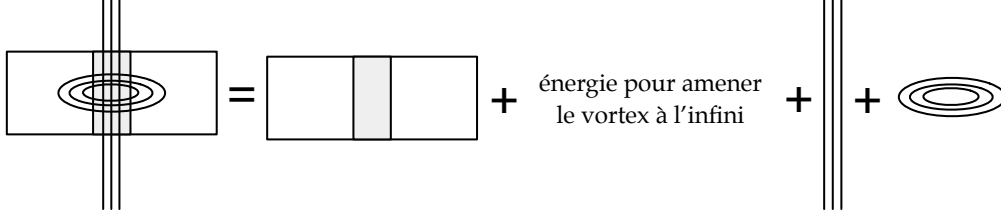
On cherche les solution sous la forme $\Psi = e^{iay}\varphi(x)$ (en négligeant les variations le long de B), on trouve après avoir effectué le changement de variable $X = x + \frac{a\hbar}{qB} : -\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(X) + \frac{1}{2}kX^2\varphi(X) = E\varphi$ avec $k = \frac{1}{m}(\frac{2\pi\hbar B}{\Phi_0})^2$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega = (n + 1/2)\frac{2\pi\hbar^2 B}{m\Phi_0} = \frac{\hbar^2}{2m\xi^2}$. Le champ maximal admettant une solution non nulle est donc $B_{c2} = \frac{\Phi_0}{2\pi\xi^2} = \sqrt{2}\kappa H_c$ ($n = 0$).



remarque: Ce calcul est un calcul de nucléation d'une phase supraconductrice au sein d'une matrice normale sous champ fort, il reste valable dans le cas des supraconducteurs de type I (pour H décroissant) mais comme dans ce cas $\kappa < 1/\sqrt{2}$, $H_{c2} < H_c \rightarrow$ apparition d'un hysteresis.

mais quelle est la valeur de H_{c1} ?

$$\begin{aligned} \text{en l'absence de vortex} \quad & g_s = f_n + \alpha|\Psi_\infty|^2 + \frac{1}{2}\beta|\Psi_\infty|^4 \quad (B = 0, J = 0) \\ \text{en présence de vortex} \quad & g_s^v = f_n + \alpha|\Psi|^2 + \frac{1}{2}\beta|\Psi|^4 - HB + \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{1}{2m}|\frac{\hbar}{i}\nabla\Psi - qA\Psi|^2 \end{aligned}$$



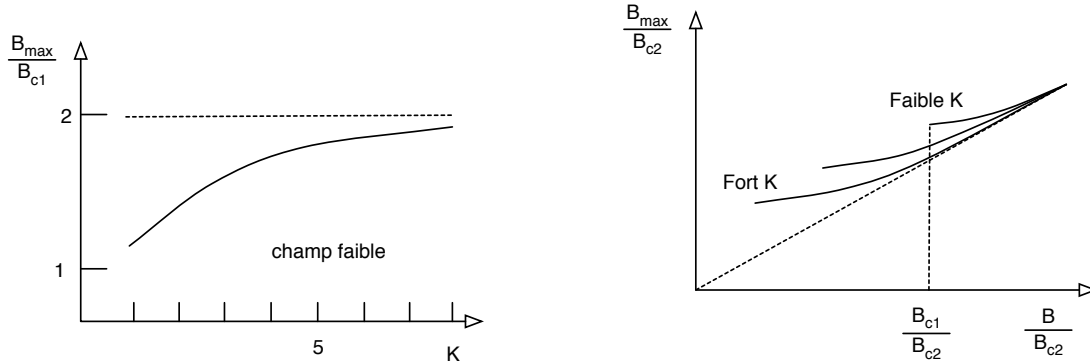
$$\begin{aligned}
 \text{énergie du vortex} &= \underbrace{\text{énergie de condensation du coeur}}_{\delta g_c} + \text{énergie pour amener le vortex à l'infini} + \text{énergie magnétique} + \text{énergie cinétique des paires} \\
 \delta G/L &= \int \int \left[\underbrace{+\alpha|\Psi_\infty|^2 + \frac{1}{2}\beta|\Psi_\infty|^4 - \alpha|\Psi|^2 - \frac{1}{2}\beta|\Psi|^4}_{\text{énergie de condensation du coeur } \delta g_c} - HB \right] ds + \underbrace{\left[\frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{1}{2m} \left| \frac{\hbar}{i} \nabla \Psi - qA\Psi \right|^2 \right]}_{\text{formation du vortex à } \infty \text{ champ au coeur + courant d'écrantage}} ds \\
 \int \int \delta g_c ds &\sim \frac{\mu_0 H_c^2}{2} \pi \xi^2 : \text{négligeable} \quad \int \int [\dots] ds = -\Phi_0 H \quad \int \int [\dots] ds \approx \frac{\Phi_0^2}{4\pi\mu_0\lambda_L^2} \ln\left(\frac{\lambda}{\xi}\right) = \epsilon_1
 \end{aligned}$$

Il y a apparition du premier vortex lorsque $\frac{1}{S} \int \int \delta g_s ds = 0$ soit $H_{c1} = \frac{\Phi_0}{4\pi\mu_0\lambda_L^2} \left[\ln(\lambda/\xi) + \underbrace{c(\lambda/\xi)}_{\sim 0.5 + \frac{1.69}{2\kappa + 0.58}} \right]$

la présence de ξ dans ϵ_1 peut paraître étonnant mais traduit la "coupure" de la divergence de B dans le coeur du vortex :

$$\begin{aligned}
 \text{saturation} &\rightarrow B(r) = C(1 - (r/\xi)^2) \quad r < \xi \\
 \text{symétrie cylindrique} &\rightarrow B(r) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda_L^2} K_0(r/\lambda) \quad r > \xi
 \end{aligned}$$

Quel est alors le champ magnétique (B_{max}) au centre du vortex ?

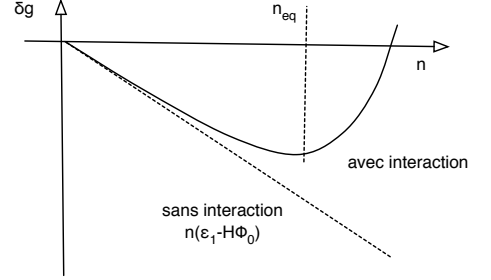


Combien de vortex pénètrent à H_{c1} ?

si un vortex est stable, pourquoi n'en crée-t-on pas 2,3,... ?
 → il faut tenir compte de l'interaction vortex-vortex
 → on remplace B par $\frac{\Phi_0}{2\pi\lambda_L^2} \sum_j K_0(|r - r_j|/\lambda_L)$
 et $\delta G/L = [n\epsilon_1 - nH\Phi_0 + \frac{n\Phi_0^2}{4\pi\mu_0\lambda_L^2} \sum_{j \neq 0} K_0(d_j(n)/\lambda_L)]$
 avec $\epsilon_1 = \Phi_0 H_{c1}$

Le nombre de vortex est celui qui minimise $\delta G/L$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta G}{\partial n} \Big|_{n=n_{eq}} &= 0 \\ \rightarrow H &= H_{c1} + \frac{\Phi_0}{4\pi\mu_0\lambda_L^2} \sum_{j \neq 0} (K_0(d_j(n)/\lambda_L) + (d_j/\lambda_L) K_1(d_j/\lambda_L)/2) \\ (\text{car } d &\propto 1/\sqrt{n}) \end{aligned}$$



- Pour $H \approx H_{c1}$ seules les interactions entre premiers voisins sont importantes ($|r - r_j| \gg \lambda_L$)

$$\rightarrow H - H_{c1} = \frac{\Phi_0}{2\mu_0\lambda_L^2} \times \overbrace{z}^{1^{er} \text{ voisins}} \times \underbrace{\sqrt{\left(\frac{\pi d}{2\lambda_L}\right) e^{-d/\lambda_L}}}_{K_0(d/\lambda_L)} \text{ où } d = \sqrt{\frac{S\alpha}{n(H)}}$$

$$\text{et } \left[\frac{d(H)}{\lambda_L} = \ln \left[\frac{\Phi_0 z}{2\mu_0\lambda_L^2 (H - H_{c1})} \right] \right] + \underbrace{\frac{1}{2} \ln \left[\frac{\pi}{2} \ln(\dots) \right]}_{\text{negligeable}}$$

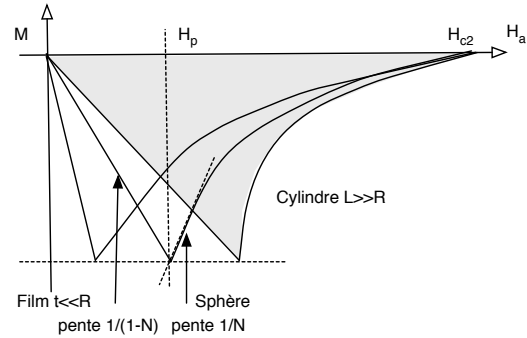
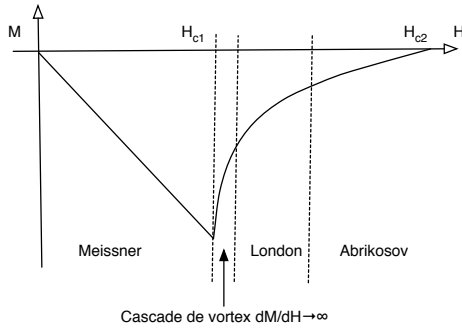
avec $B = \frac{n\Phi_0}{S} = \frac{2\Phi_0}{\sqrt{3}d^2}$ et $z = 6$ pour le réseau hexagonal (le plus stable).

$$\text{On a } M = B/\mu_0 - H = \frac{n\Phi_0}{S\mu_0} - H$$

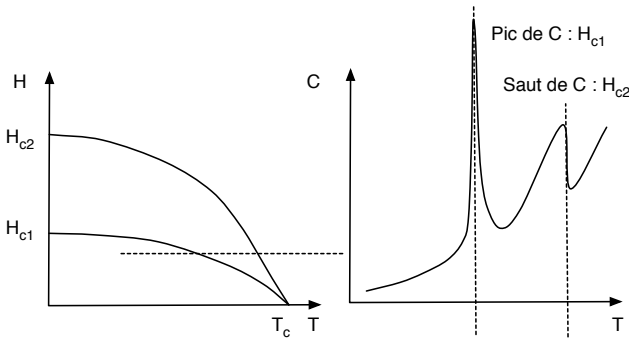
- limite de London $\xi \ll d \ll \lambda_L \rightarrow$ variation lente de B (on néglige toujours la contribution de coeur).
 $\sum K_0 \rightarrow \frac{n}{S} \iint K_0(r/\lambda_L) d^2r$
 $\rightarrow \delta g_s = \left(\frac{n\Phi_0}{S}\right)(H_{c1} - H) + \left(\frac{n\Phi_0}{S}\right)^2 \frac{\mu}{2\mu_0} K_1(\mu)$ avec $\mu = 1/\sqrt{\pi n} \lambda_L$ soit $\mu_0(H - H_{c1}) = B[\mu K_1(\mu) + \frac{\mu^2}{4} K_0(\mu)]$
 et finalement on trouve $M \approx -\frac{\Phi_0}{8\pi\mu_0\lambda_L^2} \ln(0.36/h)$.

- A haut champ (typiquement pour $H > H_{c2}/3$), les coeurs finissent par se superposer et $B \approx \mu_0 H - \mu_0 \frac{H_{c2} - H}{(2\kappa^2 - 1)\beta}$ (soit $M = \frac{H_{c2} - H}{(2\kappa^2 - 1)\beta}$) où $\beta = \frac{\langle \Psi^4 \rangle}{\langle \Psi^2 \rangle^2} \sim 1.1$ (régime d'Abrikosov).

remarque : la détermination de H_{c1} est très délicate du fait des effets "démagnétisants". Pour une ellipse $H = H_a - N.M$; $\mu_0 M = \frac{B - \mu_0 H_a}{1 - N}$, $\frac{dM}{dH_a} = \frac{dM/dH}{1 + NdM/dH} \rightarrow 1/N|_{H=H_{c1}}$ mais $\int_0^{H_{c2}} M dH_a = -\frac{H_c^2}{2\mu_0}$ indépendamment de N .



La transition à H_{c2} est du second ordre (au sens d'Ehrenfest : les dérivées seconde de g_s sont discontinues) : changement de pente de la courbe d'aimantation ($M \propto -\partial g / \partial H$) et saut de la chaleur spécifique ($C_p = T \partial S / \partial T = -T \partial^2 g / \partial T^2$). Par contre, tout comme la transition à H_c dans les type I, la transition à H_{c1} est du premier ordre mais "faiblement" : il y a un saut d'aimantation mais correspondant à... 1 vortex : $\Delta M = \frac{\Phi_0}{S \mu_0}$, un pic est visible (théoriquement car difficile à observer) dans C_p .



Supraconducteur de type I :

Le long de la ligne de transition

$$dg_N = dg_S$$

$$\text{soit : } -S_N dT + 0 = -S_S dT + \mu_0 H_c dH_c$$

$$\rightarrow (s_N - s_S)|_{H=H_c} = -\mu_0 H_c dH_c / dT$$

$$\text{et } \delta C = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_{H=H_c}$$

$$\text{d'où } \delta C = -\mu_0 T \left[\left(\frac{\partial H_c}{\partial T} \right)^2 + H_c \left(\frac{\partial^2 H_c}{\partial T^2} \right) \right]$$

$$\delta C|_{T=T_c} = -\mu_0 T_c \left(\frac{\partial H_c}{\partial T} \right)^2|_{T=T_c}$$

• TD 2

Exercice (extrait partiel 2006)

On s'intéresse au champ critique du plaque mince d'épaisseur $d \ll \xi, \lambda$. On applique à l'aide d'une bobine un champ magnétique H_a ($\parallel O_x$) parallèlement à la surface de la plaque.

1) Justifier que la densité d'enthalpie libre du système « supraconducteur + bobine » s'écrit :

$$g_s = g_N + \alpha |\psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi|^4 + \frac{1}{2m} |qA\psi|^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} - H.B$$

2) Que peut-on dire de la variation spatiale de B à l'intérieur de la plaque. En déduire une forme approchée de B et l'expression correspondante du potentiel vecteur A .

3) En déduire une expression de l'enthalpie libre par unité de surface du système : $G_s = \int_{-d/2}^{d/2} g_s(z) dz$ donner la valeur de $|\psi|^2$ permettant de minimiser G_s (on note $|\Psi_\infty| = -\alpha/\beta$).

4) En déduire l'existence d'un champ critique H_c^* , comparer cette valeur au champ critique (H_c) d'une plaque épaisse.

Effet JOSEPHSON

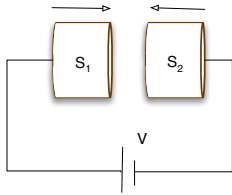
Systèmes couplés en mécanique quantique : $\begin{pmatrix} E_1 & K \\ K & E_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$

avec $E_i = \langle \Phi_i | H | \Phi_i \rangle$, $K = \langle \Phi_i | H | \Phi_j \rangle$ et $\Phi = C_1 \Phi_1 + C_2 \Phi_2$.

par analogie, pour deux supraconducteurs couplés, potentiel $\pm \frac{qV}{2}$:

$$\begin{pmatrix} \frac{qV}{2} & K \\ K & -\frac{qV}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$$

avec $\Psi_i = \sqrt{n_i} e^{i\theta_i}$ et $\dot{n}_1 + \dot{n}_2 = 0$ (conservation du nombre de particules).



$$\begin{bmatrix} \frac{qV}{2} \Psi_1 + K \Psi_2 = i\hbar \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} \\ K \Psi_1 - \frac{qV}{2} \Psi_2 = i\hbar \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Psi_1^* \\ \Psi_2^* \end{bmatrix}$$

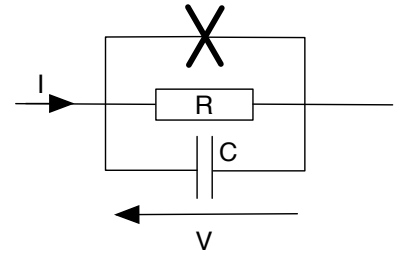
en égalant les parties imaginaires : $\dot{n}_1 = \frac{2K}{\hbar} \sqrt{n_1 n_2} \sin(\theta_1 - \theta_2)$

en égalant les parties réelles : $\dot{\theta}_1 = \frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{n_2}{n_1}} \cos(\theta_2 - \theta_1) - \frac{qV}{2\hbar}$.

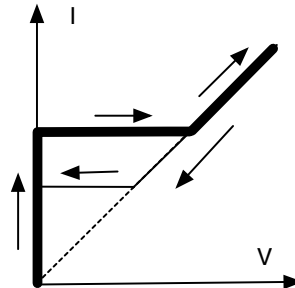
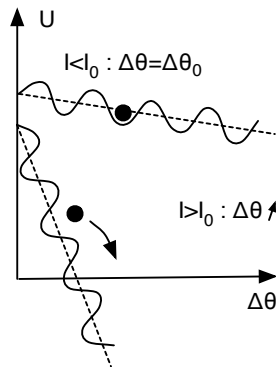
Pour deux supras identiques, le transfert de charge est faible ($n_1 \sim n_2$): $\Delta\dot{\theta} \sim \frac{qV}{\hbar}$ et $I_{1 \rightarrow 2} \propto \dot{n}_1$
soit $I = I_0 \sin(\frac{qVt}{\hbar} + \Delta\theta_0)$: courant fréquence : $3.10^9 \text{ Hz} / \mu\text{V}$.

En fait, une jonction Josephson réelle n'est pas qu'une source de courant mais une représentation réaliste d'une jonction supraconductrice est donnée par la figure ci-contre.

$I = I_0 \sin \Delta\theta + V/R + C\dot{V}$ i.e. $(C\hbar/q)\ddot{\Delta\theta} = [I - I_0 \sin \Delta\theta] - (\hbar/qR)\dot{\Delta\theta}$
 $(\hbar/qR)\dot{\Delta\theta}$ sont donc des "pertes par frottement" et $[I - I_0 \sin \Delta\theta]$ correspond à une force dérivant du potentiel : $U = -[I\Delta\theta - I_0 \cos \Delta\theta]$

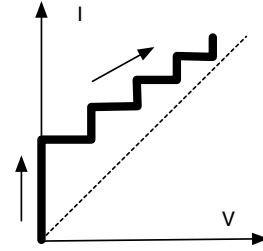


Pour $I < I_0$, la "particule" se piège dans un des puits et seul un courant supraconducteur ($V = 0$) peut circuler ($I = I_0 \sin \Delta\theta$). Pour $I > I_0$: la "particule" se dépiège et $\delta\theta$ croît; il y a conduction d'électrons normaux ($\rightarrow V = RI$) + composante HF (e supraconducteurs) qui se moyenne à zéro (à noter le retour hystérique, la particule se piège dans un puit différent).



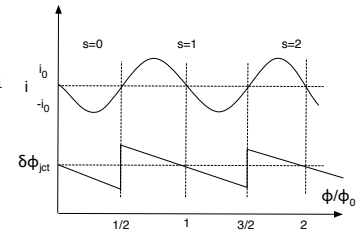
en présence d'une irradiation RF de fréquence ω , effet de "synchronisation" du courant supraconducteur à la fréquence ω : apparition d'une tension $V_n = n \frac{\hbar \omega}{q}$ amortie par C : marches de Shapiro.

remarque définition métrologique du volt : tension aux bornes d'une jonction Josephson en présence d'une irradiation radiofréquence de 483597.9 GHz



Soit une boucle d'un matériau supraconducteur comprenant une jonction

$$\Delta\theta = 2\pi s = \underbrace{\frac{m}{nq\hbar} \int J dl}_{\text{negligeable}} + \frac{\Phi}{\Phi_0} \times 2\pi + \delta\theta_{jct} \rightarrow i = i_0 \sin(2\pi(s - \frac{\theta}{\theta_0}))$$



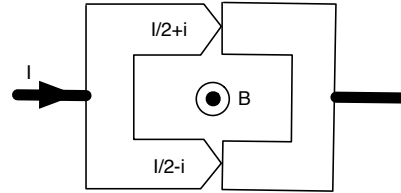
Les SQUID (Superconducting QUantum Interference Device) sont alors constitués de 2 jonctions identiques et $\delta\theta_1 = \delta\theta_2 = \pi(s - \frac{\Phi}{\Phi_0})$

La présence d'un champ B rompt la symétrie et

$$\delta\theta_1 = \delta\theta + \alpha, \delta\theta_2 = \delta\theta - \alpha,$$

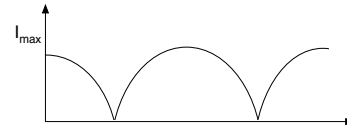
$$I/2 - i = i_0 \sin(\delta\theta_1) \text{ et } I/2 + i = i_0 \sin(\delta\theta_2)$$

$$\text{soit } I = 2i_0 \cos(\pi(s - \frac{\Phi}{\Phi_0})) \sin\alpha = I_{MAX} \sin\alpha$$



→ on mesure l'évolution du courant max pouvant circuler dans le squid en fonction du flux appliqué

Mesure de très grande précision du flux (donc de l'aimantation)



• TD 3

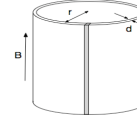
Exercice (extrait partiel 2007)

1) On place un cylindre supraconducteur creux d'épaisseur d et de rayon r ($d \ll \lambda \ll r$) dans un champ magnétique B parallèle à son axe. Montrer que le cylindre est parcouru par un courant de vitesse :

$$v_s = \frac{\hbar}{r \cdot m} \left(s - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)$$

où s est un entier et Φ le flux traversant le cylindre (on donnera la signification de Φ_0)

2) Que devient cette vitesse si le cylindre est « coupé » par une partie non supraconductrice. Tracer v_s en fonction de B dans les deux cas ?

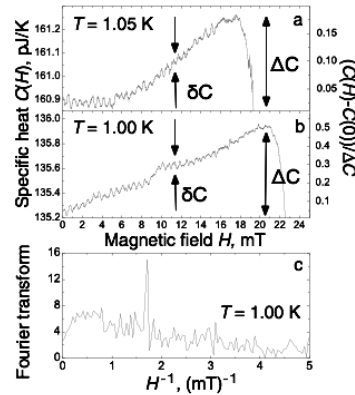


3) On se place dans le cas 1, montrer que : $\alpha + \beta |\psi|^2 + \frac{1}{2} m v_s^2 = 0$

4) Montrer que $|\Psi|^2$ s'annule pour une valeur critique de la température : $T_c^* = T_c \left(1 - \left[\frac{1}{r} \left(s - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \right]^2 \right)$

où T_c est la température critique en champ nulle et $1/\xi^2 = 1/\xi_0^2 (1 - T/T_c)$

5) La figure ci-contre représente la dépendance en champ de la chaleur spécifique obtenue 1.05K (a) et 1.00K (b) dans un anneau cylindrique d'aluminium (effet Little-Parks). Donner une valeur approchée de la température critique de l'aluminium.



6) Expliquer l'origine des oscillations (δC) et du saut principal (ΔC).

7) La transformée de Fourier de la courbe (b) est représentée en Figure (c). Interpréter le résultat obtenu, en déduire la valeur du rayon r .

Etat Mixte

• interaction vortex-vortex (par unité de longueur) :

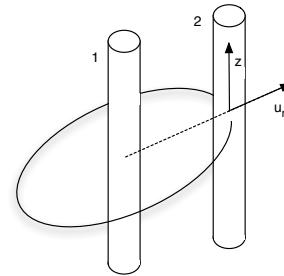
$$W_{12} = \frac{\Phi_0}{\mu_0} B(r) = \frac{\Phi_0^2}{2\pi\mu_0\lambda_L^2} K_0(r/\lambda_L)$$

$$\vec{F}_{12} = -\vec{\nabla} W_{12} = \frac{\Phi_0^2}{2\pi\mu_0\lambda_L^3} K_1(r/\lambda_L) \vec{u}_r = \begin{cases} \text{Log}(r/\xi) & \text{si } r < \lambda, \\ \exp(-r/\lambda) & \text{si } r > \lambda. \end{cases}$$

$$= \Phi_0 \vec{J}_1 \times \vec{z}$$

attention ceci est la force exercée par un courant (\vec{J}_1) sur une ligne de champ (2) alors que la force de Laplace est au contraire la champ exercée par un champ sur une ligne de courant.

→ formation d'un réseau triangulaire.



remarque Sous l'action d'un courant J , le réseau de vortex "glisse" perpendiculairement à J générant un champ électrique $\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}$ donnant lieu à une résistance électrique non négligeable : $R = R_n \times \frac{H}{H_{c2}}$ (résistance de Bardeen-Stephens, R_n est la résistance de l'état normal). Pour éviter cette dissipation il est nécessaire de piéger les vortex.

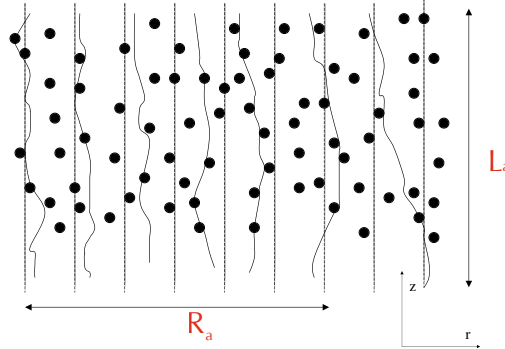
Elasticité vs désordre Si les interaction vortex-vortex devrait conduire à l'existence d'un réseau de vortex, la présence de défauts aura, au contraire, tendance à détruire l'ordre à longue portée. Il n'est alors pas évident de "deviner" quel sera la structure des vortex dans un échantillon réel. Pour cela il est important de connaître les énergies mises en jeu.

- Le réseau possède une élasticité et on peut définir une énergie associée à toute déformation du réseau : $E_{el} = \frac{C}{2} \int (\nabla u)^2 d^d r$ ou u est le déplacement de la ligne de flux / sa position "idéale"

→ C_{ii} constante élastique/unité de longueur :

$$\begin{aligned} C_{11} &: \text{compression} && \sim B^2/\mu_0 \\ C_{44} &: \text{torsion} && \sim B^2/\mu_0 \\ C_{66} &: \text{cisaillement} && \sim B\Phi_0/(16\pi\mu_0\lambda_L^2) \end{aligned}$$

- interaction vortex / défauts : tout défaut topologique ou chimique "affaiblissant" la supraconductivité constitue un centre de piégeage pour les vortex car l'énergie de condensation associée à la formation du coeur normal y est plus faible : $E_{des} = \int V(r)\rho(r)d^d r$ où V est le potentiel de piégeage (on suppose ici que l'on est en présence d'un grand nombre de défauts en interaction faible avec les vortex) et ρ est la densité de vortex : $\rho = \sum_i \delta(r - R_i^0 - u_i)$ (où R_i^0 serait la position "idéale" du vortex).



En introduisant un champ de déformation $\phi(r, z) = r - u(r, z)$, la densité peut s'écrire sous la forme : $\rho = \rho_0[1 + \partial_\alpha u_\alpha + \sum_{K \neq 0} \exp(iK\phi)]$ ¹. Le second terme correspond aux lentes fluctuations de la densité ($K \sim 0$) et on peut montrer qu'il ne joue un rôle que pour $d \leq 2$. Le dernier terme a été introduit pour tenir compte des fluctuations à courte distance liées à la présence d'un grand nombre d'impuretés (plus courte que la distance inter-vortex, ce terme n'existe pas dans le cas des cristaux atomiques). Les lignes de champs cherchent à "optimiser" leur position au sein du potentiel associé à la distribution aléatoire des défauts + énergie élastique. Petit à petit elles s'écartent de leur position idéale : existe-t-il un taille caractéristique (R_a) pour laquelle $u \sim a_0$ (pas du réseau).

¹T.Giamarchi and P.Le Doussal, Phys. Rev. B, 52, 1242 (1995).

Une analyse dimensionnelle (pour d=3) permet d'écrire: $E_{el} \sim \frac{C}{2} \left(\frac{a_0}{R_a}\right)^2 R_a^3$ alors que le terme de désordre (dernier terme) varie comme $E_{des} \sim V \frac{1}{a_0^2} \sqrt{R_a^3}$ (en introduisant $\rho_0 = 1/a_0^2$, la racine carrée est liée à la moyenne statistique sur le désordre aléatoire)

En égalant ces deux terme on trouve que $R_a \sim \frac{C^2 a_0^8}{V^2}$.

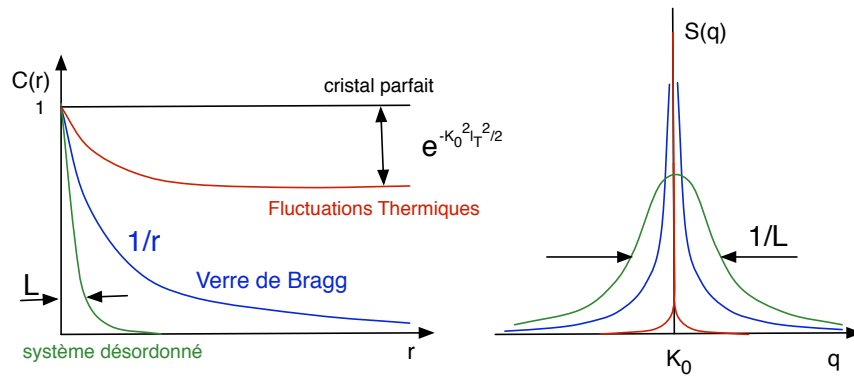
Que se passe-t-il pour $r > R_a$? \rightarrow le réseau se brise-t-il en cristallites ?

Pour quantifier le désordre, on défini : $A(r) = \overline{|u(r) - u(0)|^2}$

($\langle \dots \rangle$: moyenne sur les fluctuations thermiques, $\overline{\dots}$: moyenne sur le désordre). Le calcul de A (i.e. de $u(r)$) est un calcul très complexe notamment du fait qu'il existe des fluctuations de la densité à des échelles plus petites que le pas du réseau (la densité des défauts est très largement supérieure à celle des vortex). Ce calcul admet néanmoins une solution exacte pour les petites valeurs de R (due à Larkin) pour lesquelles on peut écrire $E_{des} = \int f(r)u(r)d^d r$, on montre alors que, en dimension d , $A(r) \propto r^{4-d}$ pour $r < R_c$ (avec $u(R_c) = \xi$). Pour $R_c < r < R_a$ u continue à croître de façon algébrique mais avec un exposant différent : $A(r) \propto r^{2\nu}$ mais pour $r > R_a$: $A(r) \propto \log r$: accroissement extrêmement lent du désordre.

T.Giamarchi et P.Le Doussal ont montré qu'il existe une nouvelle STRUCTURE DE LA MATIERE, baptisée VERRE DE BRAGG intermédiaire entre le cristal parfait et le système désordonné. Cette phase est caractérisée par :

- Un ordre à longue distance "presque parfait" : caractérisé par des pics de diffraction (divergence en loi de puissance pour $q = K$). Le facteur de diffraction $S(q)$ est la TF de la fonction de la fonction de corrélation $C(r) = \exp(-K^2 A(r)/2)$. Dans le cas d'un ordre parfait $C(r) = 1$ [ou $\exp(-K_0^2 l_T^2/2)$ en présence de fluctuations thermiques] et $S(q) = \delta(q - K_0)$ alors que dans le cas d'un système désordonné $C(r)$ décroît exponentiellement (sur une distance L) conduisant à un élargissement de $S(q)$ (avec une largeur à mi-hauteur $\sim 1/L$). Dans le cas du verre de Bragg $C(r) \propto 1/r^\eta$ (avec $\eta \sim 1$) et $S(q) \sim 1/(q - K_0)^2$. En fait, on peut montrer que dans une expérience de diffraction la largeur à mi-hauteur des pics est fixée par la résolution de l'instrument alors que leur hauteur est directement proportionnelle à R_a . Comme R_a décroît avec B , les pics s'effondrent sans élargissement (l'intensité passe dans les ailes du pic).

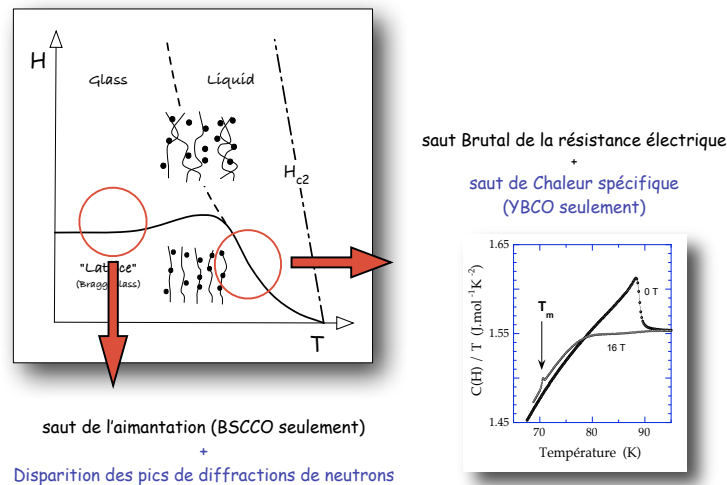


- L'absence de défauts topologiques (pas de dislocations)
- Des propriétés dynamiques vitreuses.

ce problème est caractéristique d'un grand nombre de systèmes tels : les cristaux électroniques, les billes chargées, les ondes de densité de charges et donc les vortex dans les supraconducteurs..... mais cela nécessite une double interaction : particule-particule (élasticité) et particule-désordre et donc l'existence de 2 échelles de longueur et ce concept ne s'applique donc pas aux cristaux atomiques.

Influence du champ magnétique, "fusion" du verre de Bragg : L'augmentation de la constante élastique avec B (rigidification du "réseau" du fait de la décroissance de la distance inter-vortex) étant plus faible que $1/a_0^4$, R_a diminue avec B (typiquement comme $1/B^2$ dans un modèle simple : le désordre effectif croît avec B) et lorsque $R_a \approx 20a_0$: $A(a_0) \sim c_L^2 a_0^2$ avec $c_L \sim 0.2$, le réseau devient instable et des dislocations prolifèrent dans le solide de vortex.

Phénomène identique à la FUSION mais induite par H et non pas T : transition ORDRE-DESORDRE (1er ordre) entre le verre de Bragg et un "verre de vortex" (lignes enchevêtrées). La fusion est également possible si $E_{el} \sim kT$ (les fluctuations thermique conduisent à une valeur de $u_{th}^2 \sim T/c$ et $T_m/c \sim c_l^2 a_0^2$). On obtient donc plusieurs phases de vortex possible selon la valeur de T et/ou H .



Remarque 1 : Dans la majorité des cas $R_a \gg$ taille du système et la "signature" du verre de Bragg ne peut pas être observée, il a fallu attendre la découverte des oxydes ayant un fort caractère 2D (donc un C très faible mais aussi une forte T_c et donc des fluctuations thermiques, kT , fortes) pour mettre en évidence l'existence de ces nouvelles phases de vortex.

Remarque 2 : Le mouvement des vortex dans la phase liquide conduit à une forte dissipation ($R \neq 0$) et il est très difficile de différencier le liquide de vortex de l'état normal, la ligne H_{c2} - si elle existe toujours... - devient alors très difficile à mesurer (la ligne H_{c1} n'a pas été représentée par simplicité).

Piégeage des vortex, courant critique : On s'intéressera ici uniquement au piégeage d'un vortex par un grand nombre de défauts (de densité n) mais ne pouvant pas piéger individuellement un vortex (piégeage collectif faible). On suppose que le rayon d'action d'un piège est $\sim \xi$. On note f_p la force exercée par un défaut. L'énergie (par unité de longueur) associée au piégeage par les défauts est alors $E_{des}/L \sim f_p \sqrt{N} \xi / L$ (le gain est proportionnel à la racine carrée du nombre de défauts $N = n \xi^2 L$ rencontré par la ligne, statistique de type "marche aléatoire"). Mais ces déformations (de l'ordre de ξ) ont un coût en énergie élastique : $E_{el}/L \sim \epsilon_0 (\xi/L)^2$ où ϵ_0 est la "tension de ligne" que l'on a déjà rencontré lors du calcul de H_{c1} (ordre de grandeurs, on peut "oublier" le terme en $Ln(\kappa) + c(\kappa)$) : $\epsilon_0 = \frac{\Phi_0^2}{4\pi\mu_0\lambda_L^2}$.

On obtient une longueur optimale permettant d'obtenir le gain E_{des}/L maximal sans excéder E_{el}/L :

$$L_c \sim \left(\frac{\epsilon_0^2 \xi^2}{\gamma} \right)^{1/3} \text{ où } \gamma = f_p^2 n \xi^2 \text{ (pour laquelle } E_{des} \sim E_{el}).$$

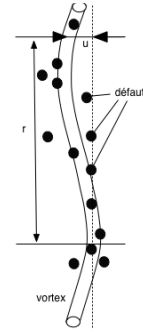
On définit ainsi une énergie $U_c = E_{el}(L = L_c) (\equiv E_{des}(L = L_c)) \sim (\gamma \epsilon_0 \xi^4)^{1/3}$.

En présence d'une densité de courant J , il s'exerce une force de Lorentz sur la ligne $F_L = J \Phi_0 L_c$ ($J L_c L_y \times L_x \times B$ et $B L_x L_y = \Phi_0$) et le gain énergétique associé à un déplacement de l'ordre de ξ (rayon d'action des défauts) est donc $E_L \sim J \Phi_0 L_c \xi$. Si $E_L > E_c$ le vortex se "dépiege" et on obtient donc une densité de courant critique pouvant circuler sans déplacement des vortex :

$$J_c = \frac{\epsilon_0}{\Phi_0 \xi} \times \left(\frac{\xi}{L_c} \right)^2 \text{ où } J_0 = \frac{\epsilon_0}{\Phi_0 \xi} \text{ est le courant maximal pouvant être appliqué sans destruction des paires.}$$

• TD 4

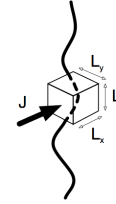
On se place dans le cadre du modèle de « piégeage collectif ». On néglige les interactions entre vortex (champ faible). Chaque vortex est alors piégé « collectivement » par les défauts présents dans le matériau. Le vortex (de direction moyenne Oz) se déforme pour adopter une configuration lui permettant de minimiser son énergie totale (U_c). On note $u^2(r)$ le déplacement quadratique moyen d'un vortex à l'abscisse r ($=L_z$) par rapport à sa position « idéale » (i.e. en l'absence de défauts)



1) Quelles sont les deux (principales) énergies entrant en compte dans le calcul de U_c en l'absence de courant. On peut montrer que $u^2(r) = \xi (r/L_c)^2$ ou ξ est la longueur de cohérence et ξ est un exposant caractéristique du régime de piégeage considéré ($1/2 < \xi < 1$). Quelle est la signification physique de L_c .

L'énergie de piégeage du vortex s'écrit alors $\epsilon_p(r) = U_c (r/L_c)^{2\xi-1}$.

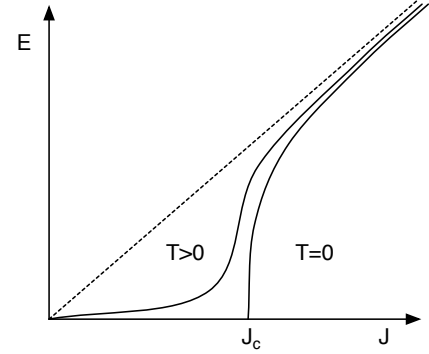
2) En appliquant la force de Lorentz associée à une densité de courant J sur un « cube » ($L_x L_y L_z$, voir figure ci-contre) montrer que l'énergie de Lorentz associée à un déplacement u est de l'ordre de $\epsilon_L = J \Phi_0 L_c \xi (r/L_c)^{\xi+1}$.



4) Tracer schématiquement l'évolution de $\epsilon = \epsilon_p - \epsilon_L$ en fonction de r pour différentes valeurs de J ($J \sim 0$, $J < J_c$ et $J > J_c$ où J_c est le courant au delà duquel le vortex est dépiégé). En déduire que, pour $J < J_c$, il existe une longueur « optimale » (L_{opt}) permettant de piéger des segments de vortex et donner la valeur de $\epsilon(r=L_{opt}, J)$ correspondante.

Remarque 1 : Le mouvement des vortex pour $J > J_c$ conduit à l'apparition d'un champ électrique $E = v \times B$ et donc à de la DISSIPATION ($E.J$), on perd l'intérêt premier du supraconducteur ($R \neq 0$).

Pour $T > 0$, le dépiégeage des vortex est thermiquement possible même si $J < J_c$, on peut montrer que l'énergie de piégeage dépend du courant : $U(J) \sim U_c((J_c/J)^\alpha - 1)$, la vitesse de déplacement est alors $v \propto \exp(-U(J)/kT)$ et le champ électrique correspondant $E(J) = v \times B \propto \exp(-U(J)/kT)$. Ce déplacement est appelé FLUAGE.



Remarque 2 : Il est également possible d'avoir des centres de piégeage "fort" : macles, fissures, agrégats non supraconducteurs, défauts colonnaires introduits artificiellement par irradiation aux ions lourds,....

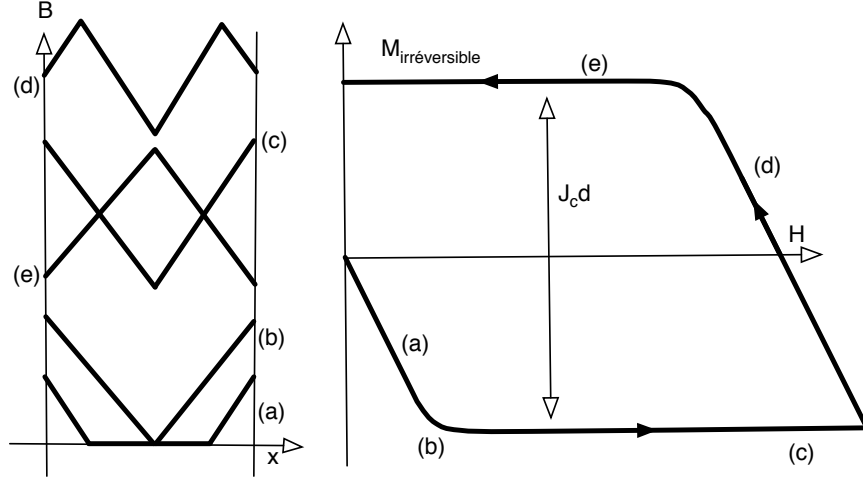
Remarque 3 : Pour les fortes valeurs de H, on doit tenir compte de l'interaction entre les vortex dans le calcul de U_c (on remplace ϵ_0 car C_{ii}) mais le raisonnement est similaire.

Remarque 4 : Les lignes telles les parois de domaines magnétiques, les fronts de mouillage ou de feux de forêts, les lignes de fracture et/ou les dislocations.... relèvent de la même problématique.

Comment mesure-t-on expérimentalement J_c ?

→: mesure d'aimantation. En effet, à l'aimantation dite réversible (voir chapitre précédent) s'ajoute une contribution irréversible liée à la distribution inhomogène des vortex : lorsqu'on augmente H des vortex se créent à la périphérie mais ces vortex ne peuvent pas gagner le centre de l'échantillon car ils restent piégés par les défauts présents près des bords (on néglige ici les effet *géométriques*) : il apparait donc un gradient de champ magnétique (du fait de la plus forte densité de vortex près des bords) liée au courant critique par l'équation de Maxwell $\vec{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{J}_c$ et donc une aimantation (irréversible) associée : $M = \frac{1}{\mu_0 d} \int B dx - H$. Cette contribution est en effet irréversible car les vortex restent piégés au centre lorsque B décroît et la distribution de B est différente pour B croissant et décroissant.

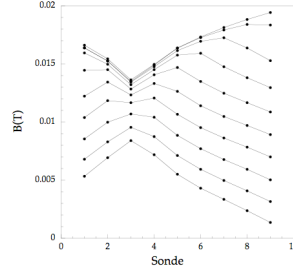
L'évolution de cette composant de M en fonction du champ appliquée est représentée ci-dessous (la composante réversible n'est pas représentée). Pour un échantillon infini, $rotB \sim \partial B/\partial x = \mu_0 J_c$ et en champ croissant B décroît donc \sim linéairement avec x (a) (voir aussi examen ci-dessous). L'aimantation (irréversible) diminue jusqu'à ce que le front arrive au centre de l'échantillon (b) puis reste constante (si J_c ne dépend pas de B) $\sim -J_c d/2$ (c) où d est le rayon de l'échantillon). Lorsque l'on décroît le champ, le profil de B s'inverse (d) (les vortex près des bords quittent l'échantillon) et l'aimantation augmente jusqu'à atteindre $+J_c d/2$ (e). Il reste donc une aimantation positive (vortex piégés) dans l'échantillon même pour $H_a = 0$. Remarque : Pour $T > 0$, la largeur du cycle n'est pas exactement déterminée par J_c mais le courant induit J défini par la relation $E(J)$ et l'équation de Maxwell $E/d \sim \partial B/\partial t$.



• TD 5

On mesure l'induction B à la surface d'un film mince de Nobium.

1) On fait varier progressivement le champ magnétique extérieur $\mu_0 H_a$ de 0 à $\sim 0.02T$ puis de $\sim 0.02T$ à 0. On mesure la distribution de B_z présentée sur la figure ci-contre (en fonction du numéro de la sonde) pour différentes valeurs de H_a (appliqué perpendiculairement au film). Discuter la forme des profils obtenus. Lors de quelle séquence de champs (i.e. champ croissant ou décroissant) ces profils ont-ils été réalisés ? Le Nobium est-il un supraconducteur de type I ou de type II (justifier votre réponse) ?



2) Dessiner schématiquement les profils que l'on aurait obtenu lors de l'autre séquence (pour quelques valeurs de H_a). Dessiner schématiquement quelques lignes de flux dans le film (en vue de profil) pour $\mu_0 H_a \sim 0.02T$. Ce profil de champ est associé à un courant critique J_y supposé indépendant de B . Quelle relation lie J et B , en déduire pourquoi le profil n'est pas parfaitement linéaire pour $\mu_0 H_a \sim 0.02T$?

Eléments de théorie BCS (Bardeen - Cooper - Schrieffer, Prix Nobel 1972)

Si on note Φ^{ext} le potentiel extérieur, Φ^{ion} celui des ions (nus) et Φ^{el} celui des électrons, le potentiel total $\Phi = \Phi^{ext} + \Phi^{ion} + \Phi^{el}$ est relié à Φ^{ext} par l'intermédiaire d'une constante diélectrique ϵ : $\Phi^{ext}/\epsilon = (\Phi^{ext} + \Phi^{ion})/\epsilon^{el} = (\Phi^{ext} + \Phi^{el})/\epsilon^{ion}$ et ϵ est donc égal à $\epsilon^{el} + \epsilon^{ion} - 1$. L'écrantage de la répulsion Coulombienne à longue distance à l'intérieur du gaz électronique conduit à remplacer $V(r) = e^2/(4\pi\epsilon_0 r)$ par $[e^2/(4\pi\epsilon_0 r)]\exp(-k_0 r)$ soit $V(q) \propto 1/q^2$ par $V(q) \propto 1/(q^2 + k_0^2)$ et on a donc $\epsilon^{el} = 1 + k_0^2/q^2$ (si $\omega \ll v_F q$, $\epsilon^{el}(k, \omega) \approx \epsilon^{el}(k)$). Par ailleurs la réponse des ions peut être obtenue par analogie au mode de vibration longitudinale d'un gaz électronique soumis à un champ extérieur : $\epsilon^{ion} = 1 - \Omega_p^2/\omega^2$ (ou Ω_p est la fréquence plasma des ions). On en déduit que :

$$\boxed{\frac{1}{\epsilon} = \frac{1}{1+k_0^2/k^2} \times \frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega_p^2/\epsilon^{el}}}$$

ou $\Omega_p^2/\epsilon^{el} = \omega(k)$ est la relation de dispersion des phonons. On remarque donc que si $\hbar\omega = \epsilon_k - \epsilon_{k'} < \hbar\omega(k - k')$, ϵ est négatif et l'interaction effective entre électrons devient donc ATTRACTIVE. C'est ce "changement de signe" de la constante diélectrique qui est à la base de la supraconductivité. Seul l'interaction entre électrons proches du niveau de Fermi est sensiblement affectée par les phonons et dans le cas des supraconducteurs, l'état \vec{k} est couplée à un état $-\vec{k}$ par ce potentiel attracteur (noté ci dessous -V) "par l'échange d'un phonon" : on forme alors une PAIRE DE COOPER (q=2e).

Soit un Hamiltonien H_0 dont les fonctions propres $|n\rangle$ et les valeurs propres E_n sont connues. Soit $H = H_0 + V$, on note $|\alpha\rangle$ les nouvelles fonctions d'ondes : $\sum_n C_n^\alpha |n\rangle$, $\langle m|H|\alpha\rangle = C_m^\alpha E_m + \sum_n C_n^\alpha \langle m|V|n\rangle = E.C_m^\alpha$, et les C_m^α sont donnés par :

$$\begin{pmatrix} V_{11} + E_1 - E & V_{12} & V_{13} & \dots \\ V_{21} & V_{22} + E_2 - E & V_{23} & \dots \\ V_{31} & V_{32} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1^\alpha \\ C_2^\alpha \\ C_3^\alpha \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix}$$

On considère 4 états : $|k\rangle$, $|-k\rangle$, $|k'\rangle$ et $|-k'\rangle$ correspondant à 6 états à 2 particules $|k, -k\rangle$, $|k, k'\rangle$, $|k, -k'\rangle$ Seuls $|k, -k\rangle$ (d'énergie 2ϵ) et $|k', -k'\rangle$ (d'énergie $2\epsilon'$) sont couplés (l'énergie des autres états n'est pas affectées par le coupage) et la matrice se réduit à :

$$\begin{pmatrix} 2\epsilon - V - E & 0 & 0 & 0 & 0 & -V \\ 0 & \epsilon + \epsilon' - E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon + \epsilon' - E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon + \epsilon' - E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon + \epsilon' - E & 0 \\ -V & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\epsilon' - V - E \end{pmatrix}$$

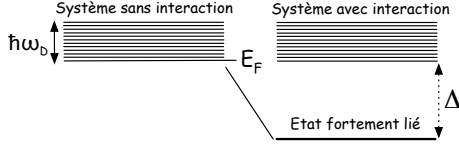
soit un bloc $\begin{pmatrix} 2\epsilon - V - E & -V \\ -V & 2\epsilon' - V - E \end{pmatrix}$ à diagonaliser. Cette diagonalisation conduit 2 états ($|\alpha\rangle$ et $|\beta\rangle$) dont un a une énergie beaucoup plus basse (i.e. abaissé de Δ) que 2ϵ (et $2\epsilon'$). Dans le cas particulier ou $\epsilon = \epsilon'$, $|\alpha\rangle = 1/\sqrt{2}(|k, -k\rangle + |k', -k'\rangle)$ et $|\beta\rangle = 1/\sqrt{2}(|k, -k\rangle - |k', -k'\rangle)$ avec $E_\alpha = 2\epsilon - 2V$ et $E_\beta = 2\epsilon$.

Si on généralise à tous les état $0 < \epsilon_k < \hbar\omega_D$ on a :

$$\begin{cases} V(C_1 + C_2 + C_3 + \dots) &= C_1(2E_1 - E) \\ V(C_1 + C_2 + C_3 + \dots) &= C_2(2E_2 - E) \\ V(C_1 + C_2 + C_3 + \dots) &= C_3(2E_3 - E) \\ &\dots \end{cases}$$

soit $\boxed{\frac{1}{V} = \sum_k \frac{1}{2E_k - E}}$ avec $E = 2(E_F - \Delta)$ et si on note $\epsilon_k = E_k - E_F \sim \hbar^2 k^2 / 2m - E_F$:

$$\boxed{\frac{1}{V} = \sum_k \frac{1}{2(\epsilon_k + \Delta)}}$$



On a donc $\frac{1}{V} = g(E_F) \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\epsilon}{\epsilon + \Delta} \sim g(E_F) \ln(\frac{\hbar\omega_D}{\Delta})$ ($\Delta \ll \hbar\omega_D$ et $g(E_F)$ est la densité d'états de paires). Dans le cas de la création de N paires, le calcul est plus compliqué mais conduit également à l'existence d'un niveau à $-\Delta$ sous E_F et à

$$\Delta(0) = 2 \times \hbar\omega_D \exp(-1/Vg(E_F))$$

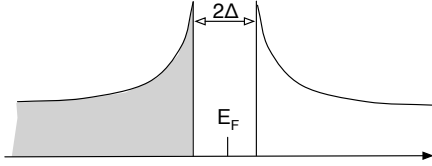
Lorsque $T \neq 0$, les état ϵ_k ont la probabilité $f_k = \frac{1}{e^{\epsilon_k/kT} + 1}$ d'être occupé par un électron célibataire, la probabilité de pouvoir former la paire est alors $1 - 2f_k$ et $\frac{1}{V} = \sum_k \frac{1}{2E_k} (1 - 2f_k)$, en écrivant que $\Delta = 0$ pour $T = T_c$, on trouve $kT_c = 1.14\hbar\omega_D \exp(1/(g(E_F)V))$, soit $2\Delta(0) = 3.52kT_c$.

• $\Delta k = (\partial k / \partial E)_{E=E_F} \times \Delta = \frac{m\Delta}{\hbar k_F}$ et $\Delta k \Delta x \sim 1 \rightarrow \Delta x = \left[\xi = \frac{\hbar v_F}{\Delta} \right]$.

ξ correspond à la distance moyenne entre deux électrons d'une paire mais attention le couplage a lieu dans l'espace réciproque (+k/-k). Un calcul exact donne $\xi = \frac{\hbar v_F}{\pi \Delta}$. On remarquera que, contrairement à GL, la théorie BCS permet d'obtenir une expression de ξ .

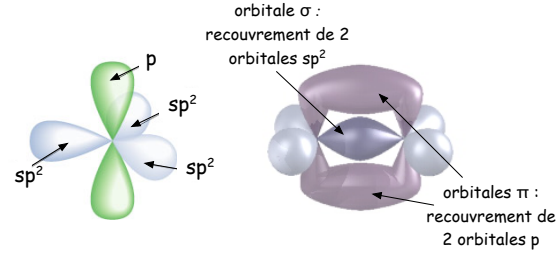
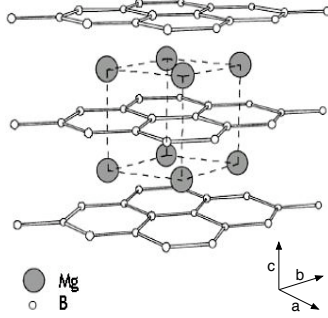
• $2g(E_F) \times \Delta$ électrons sont donc condensés dans l'état supraconducteur. Le gain moyen en énergie est $\Delta/2$ (le niveau de Fermi est donc abaissée de cette valeur) et l'énergie totale gagnée est donc $g(E_F)\Delta^2 = \mu_0 H_c^2 L^3 / 2$. Dans un modèle d'électrons libres :

$$\left. \begin{aligned} g(E_F) &= \frac{3}{2} \frac{N}{E_F} \\ E_F &= \frac{mv_F^2}{2} \\ \xi &= \frac{\hbar v_F}{\pi \Delta} \\ \lambda_L^2 &= \frac{mL^3}{\mu_0 N q^2} \end{aligned} \right\} H_c = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \frac{\Phi_0}{2\pi \sqrt{2} \mu_0 \lambda_L \xi}, \text{ très proche de l'expression GL : } \frac{\Phi_0}{2\pi \sqrt{2} \mu_0 \lambda_L \xi}.$$

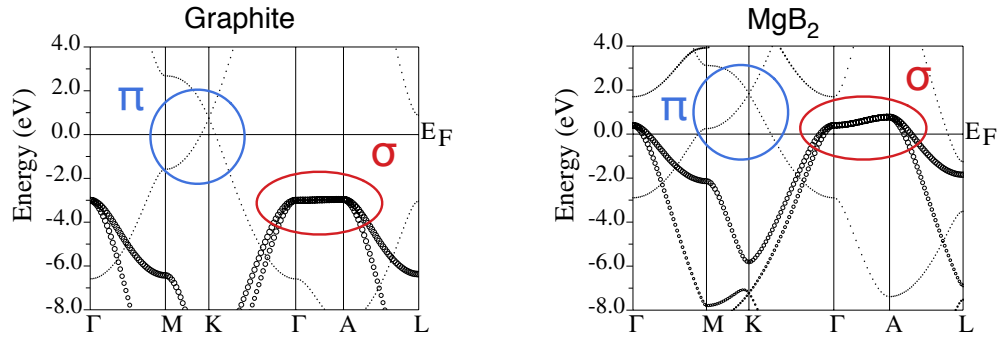


Il apparaît donc un gap dans le spectre des excitations des quasiparticules (électrons non appariés) dont la densité d'états devient : $g(E) \propto E / \sqrt{E^2 - \Delta^2}$

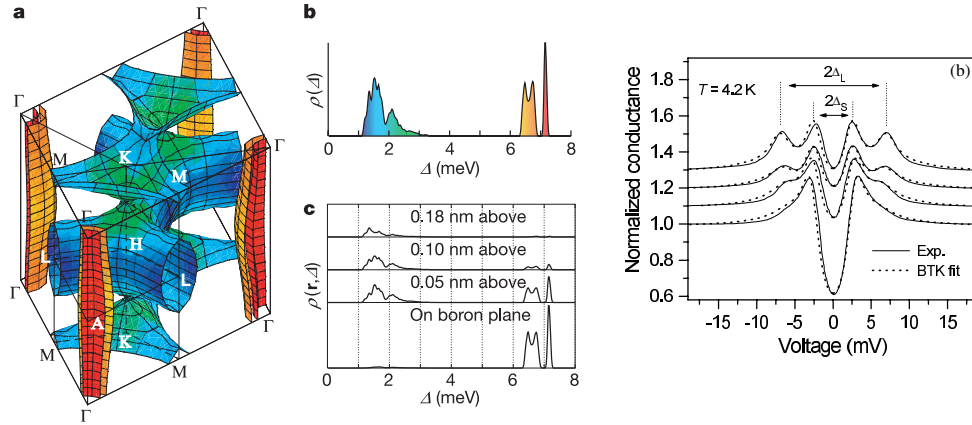
• LE CAS DE MgB_2 . MgB_2 a une structure hexagonale identique à celle du graphite. Elle fait donc intervenir des liaisons covalentes planaires (de type sp^2 , liaisons σ) et des liaisons 3D (recouvrement radial des orbitales p_z , liaison π).



Dans le cas du graphite les liaisons σ se situent très en dessous du niveau de Fermi et assurent la cohésion du cristal (système covalent), la conduction se fait via les liaisons π , la particularité de MgB₂ est liée à un transfert de charges due à l'intercalation des ions Mg^{2+} , la bande σ se trouve alors partiellement vidée et la conduction se fait désormais via les bandes π ET σ , le couplage e-phonon de la bande σ est particulièrement bon et de plus, de par le caractère 2D de cette bande, la densité d'états est forte $\sim mL^2/\pi\hbar^2$ malgré un taux de "dopage" faible : la T_c est alors de l'ordre de $\sim 40K$. La bande π conduit elle aussi à de la supraconductivité mais avec une $T_c \sim 10K$: DEUX SUPRACONDUCTEURS COEXISTENT dans un même matériau.



Ces deux nappes (voir surface de Fermi correspondante sur la figure ci-dessous, en rouge : les nappes "tubulaire" associées à la bande σ quasi-2D et en bleu le "réseau" 3D associée à la bande π) conduisent donc à l'existence de DEUX GAPS, qui ont été clairement mis en évidence par spectroscopie. Lorsque le courant est injecté dans les plans ab les deux gaps sont visibles (courbes du haut) mais seul le petit gap est lisible pour $I//c$ (courbe du bas). Les deux bandes sont néanmoins (faiblement) couplés et il n'existe qu'une seule T_c .



On remarque donc que dans ce cas la valeur des gaps est différente de celle prédite par le modèle BCS : $2\Delta_1 \approx 4 \text{ meV} \sim 1.2 k_B T_c$ et $2\Delta_2 \approx 15 \text{ meV} \sim 4.6 k_B T_c$

• TD 6

MgB_2 se caractérise avant tout par sa structure électronique particulière. En effet *deux bandes* participent à la supraconductivité et tout se passe alors comme si *deux supraconducteurs coexistent dans un même matériau*. On note ξ_1, λ_1, m_1 et T_{c1} (resp. ξ_2, λ_2, m_2 et T_{c2}) les grandeurs caractéristiques du supraconducteur 1 (resp. du supraconducteur 2) et

$$\Delta F \text{ s'écrit alors : } \Delta F = \alpha_1 |\psi_1|^2 + \alpha_2 |\psi_2|^2 + \frac{1}{2} \beta_1 |\psi_1|^4 + \frac{1}{2} \beta_2 |\psi_2|^4 - \gamma (\psi_1^* \psi_2 + \psi_1 \psi_2^*) + \dots$$

1) Complétez les « ... » laissés libres dans l'écriture de ΔF ci-dessus. γ est le paramètre de couplage entre les deux bandes, exprimez α_i et β_i en fonction des grandeurs caractéristiques des deux supraconducteurs.

2) Montrez que ΔF peut s'écrire sous la forme $\Delta F = [\psi_1 \quad \psi_2] M \begin{bmatrix} \psi_1^* \\ \psi_2^* \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \beta_1 |\psi_1|^4 + \frac{1}{2} \beta_2 |\psi_2|^4 + \dots$

où M est une matrice 2×2 dont on précisera les coefficients. Par analogie avec la définition de T_c dans les systèmes à 1 gap quelle sera la valeur de la température critique dans ce cas. Deux valeurs sont possibles de T_c , tracez leur évolution en fonction de γ . En fait Les deux bandes couplées ne présentent qu'une valeur commune de T_c égale à la plus grande de ces deux valeurs, le couplage est-il « intéressant » ou non ?

• La conduction sans perte est assurée par les paires de Cooper condensées à E_F mais il nous reste à élucider un dernier point : POURQUOI $R = 0$?

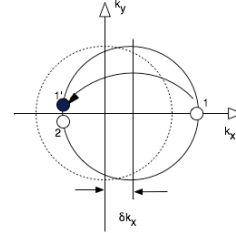
Dans un métal normal sous l'action d'un champ électrique \vec{E} , la sphère de Fermi se décale de $\delta \vec{k} = \frac{q \vec{E}}{m \hbar} t$ mais la diffusion "compense" l'action de \vec{E} et on obtient un équilibre pour $\delta \vec{k} = \frac{m \vec{v}}{\hbar} = \frac{q \vec{E} \tau}{m \hbar}$.

Dans le supraconducteur si \vec{k} est diffusé en $\vec{k} + \vec{k}_{dif}$, $-\vec{k}$ est alors diffusé en $-\vec{k} + \vec{k}_{dif}$ du fait du couplage $\vec{k} / -\vec{k}$ (voir exercice ci-dessous) et la vitesse de déplacement global de la sphère n'est donc PAS AFFECTÉE PAR LA DIFFUSION : $R=0$.

• TD 7

Exercice (extrait partiel 2006)

On note Δ le gap supraconducteur relié à la longueur de cohérence par $\Delta = \hbar v_F / \pi \xi$. Une paire de Cooper est représentée par les cercles blancs sur la figure ci-contre. En présence d'un courant J (selon Ox) la sphère de Fermi est « décalée » de $\delta k_x \ll k_F$. On s'intéresse à la diffusion vers « l'arrière » de l'électron « avant » de la paire (diffusion de 1 en 1').



1) On note k_1 et k_2 les valeurs de k des deux électrons de la paire. Donner k_1 et k_2 (avant la diffusion) en fonction de k_F et δk_x . Montrer que l'énergie d'une paire de Cooper est de l'ordre de $\hbar^2 k_F^2 / m - 2\Delta$ (au premier ordre en $\delta k_x / k_F$). que se passe-t-il pour l'électron 2 lorsque 1 est diffusé en 1', en déduire que l'énergie de la paire n'est pas affectée par la diffusion.

2) On suppose maintenant que la paire est brisée par la diffusion $1 \rightarrow 1'$. Quelles sont les nouvelles valeurs de k_1 et k_2 . Quelle est alors la valeur de l'énergie de la paire (on se limitera à un développement limité au premier ordre en $\delta k_x / k_F$). En déduire la valeur maximale (J_c) du courant pouvant circuler dans le matériau. Conclusion.

3) Donner l'ordre de grandeur de J_c (pour $T \sim 0$) pour un supraconducteur de $\xi \sim 100 \text{ \AA}$ et $\lambda \sim 1000 \text{ \AA}$. Une mesure effectuée sous champ ($H > H_{c1}$) montre que le matériau présente de la dissipation (i.e. une résistance non nulle) pour $J > 10^5 \text{ A/cm}^2$. Pourquoi.

La diffusion ne brise pas la paire tant que $\frac{\hbar k_F}{m} \delta k$ reste inférieur à Δ soit pour une densité de courant $J < J_c \sim nq\Delta / \hbar k_F \sim H_c / \lambda_L$ (en introduisant $J = nqv = nq \frac{\hbar \delta k}{m}$).