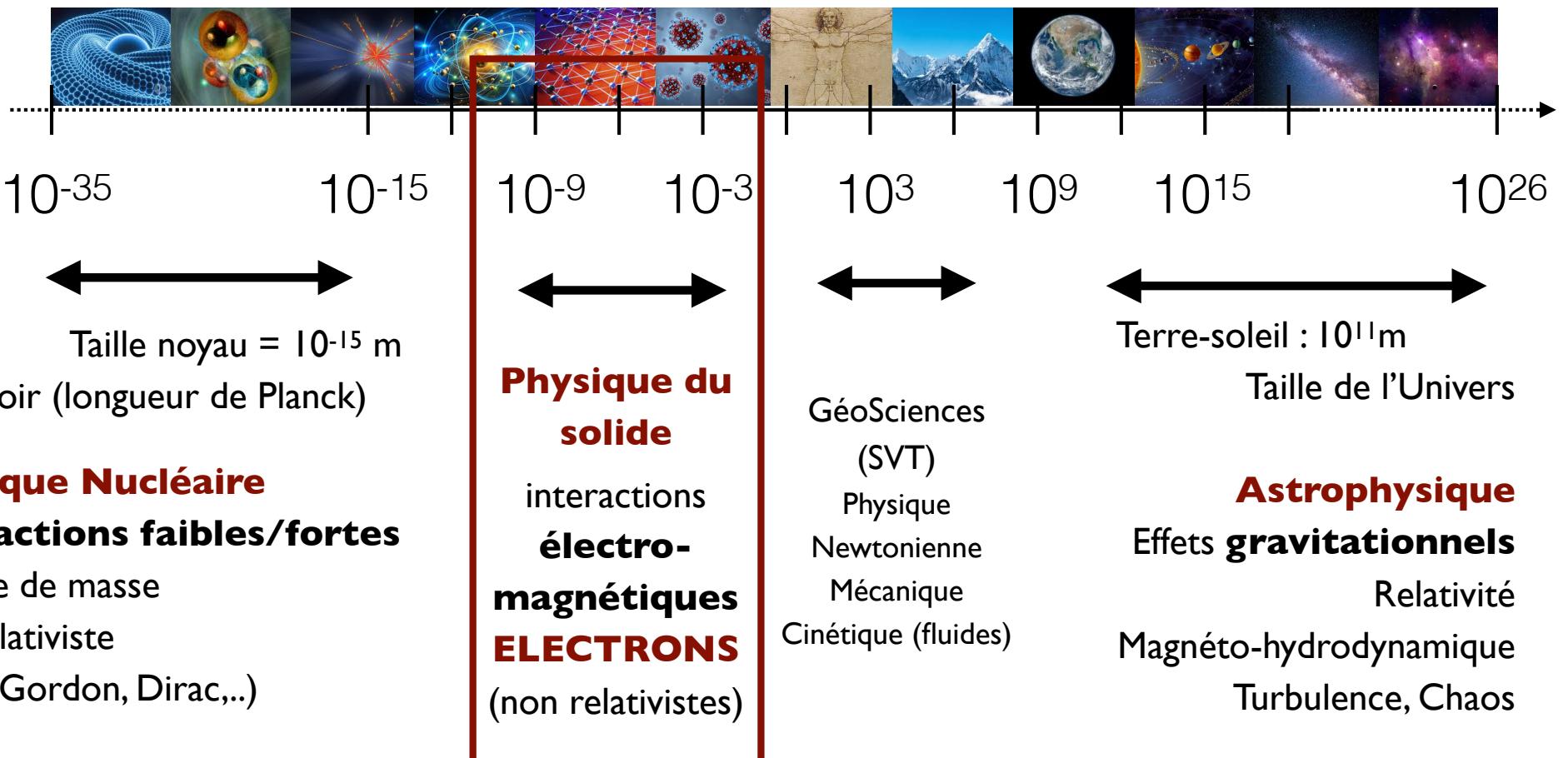
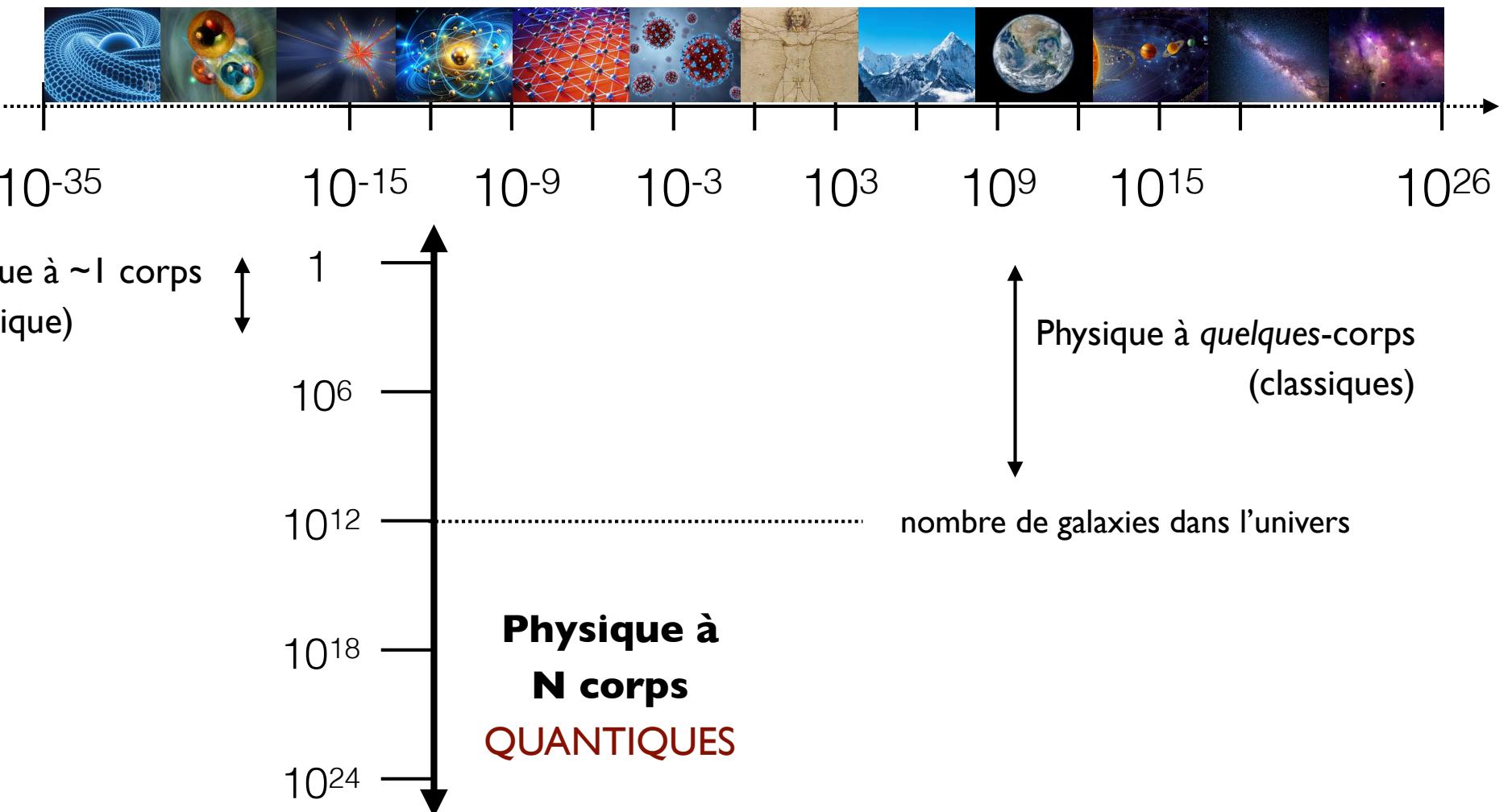


Introduction à la Physique du Solide

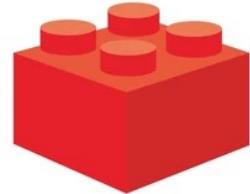
9 cours (Thierry Klein) + 8 TDs (Panayotis Spathis, Wiebke Hasch-Guichard)
thierry.klein@neel.cnrs.fr



Un deuxième axe de complexité conceptuelle....
..... et de comportements physiques remarquables :
Le nombre de particules



C'est quoi un électron....



particule* de

masse

$$m = 9.1 \times 10^{-31} kg$$

charge

$$e = -1.6 \times 10^{-19} C$$

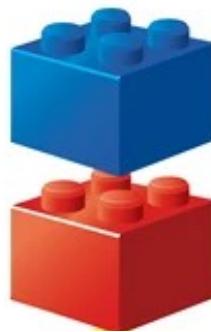
(+ SPIN 1/2)

* Joseph Thomson

prix Nobel 1906.

Son fils (George) aura lui
le prix Nobel en 1937
pour avoir montré que
l'électron est une **onde**...

C'est quoi deux électrons....



deux particules qui se
repoussent du fait des
interactions
electrostatiques....
.... pas forcément

elles peuvent s'attirer !
(dans la matière)
En fait en mécanique quantique
on ne sait pas exactement...

C'est quoi 10^{23} électrons....



on ne sait plus du tout !

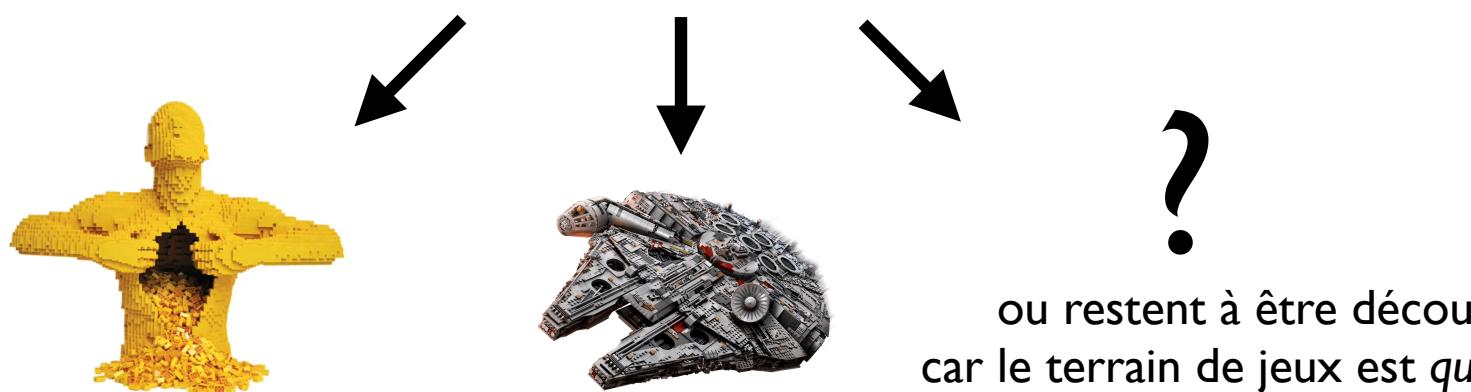
leur *masse* peut alors devenir
très grande ou au contraire
très faible
.... voire NULLE

ou même **négative** (trous)
et leur *charge* peut doubler
(paires) mais également se
fractionnaliser ($e/3$)...

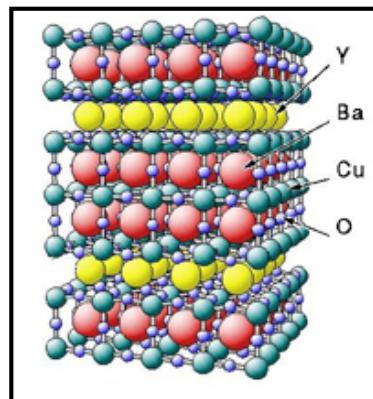
La brique élémentaire est simple
mais la complexité naît du très grand **nombre de particules** conduisant à un très grand
nombre de « réalisations » (quantiques) \Rightarrow comportements physiques possibles

Certains de ces comportements sont parfaitement compris
[et peuvent - ou pas - donner lieu à des applications...].

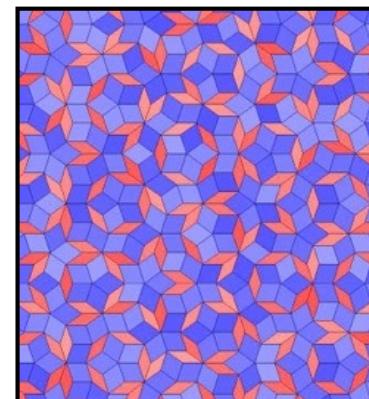
D'autres ont été identifiés mais ne sont toujours pas compris
ou ont été prédicts mais n'ont pas encore été observés



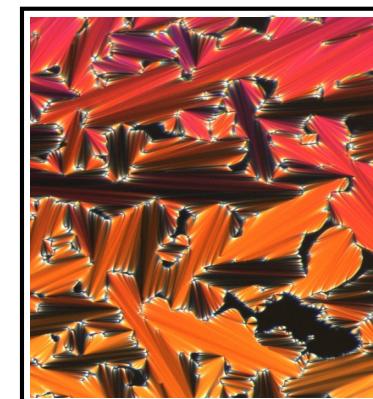
ou restent à être découverts !
car le terrain de jeux est quasi infini...



cristaux



quasicristaux (pavages de Penrose)



cristaux liquides (Kevlar), verres

Pour finir...

comprendre le monde qui nous entoure

pourquoi les miroirs sont-ils réfléchissants,

pourquoi le cuivre est-il jaune et pas l'aluminium,

pourquoi les aimants collent-ils sur les réfrigérateurs,

pourquoi certains solides conduisent-ils le courant et pas d'autres,

pourquoi les solides sont-ils solides ?...

et répondre à de grandes questions fondamentales

états quantiques critiques (intrication)

supraconductivité non conventionnelle

ordres magnétiques complexes (monopoles) et états topologiques

fractionalisation des électrons (séparation spin/charge)

particules « exotiques » etc...

Mais ces questions sont essentiellement QUANTIQUES et
ce cours est une **première approche classique**
des différentes propriétés physiques de la **matière condensée.**
(électroniques, optiques, magnétiques et thermodynamiques).

Cette approche est donc « limitée » et sera complétée en master

En M1 :

Le gaz électronique quantique (modèle de Sommerfeld) et le magnétisme quantique

Réseau cristallin : modes de vibration (phonons) et cohésion des solides

Structure électronique et instabilités électroniques

et pour ceux qui souhaiteront approfondir :

en M2 (matière quantique) :

Seconde quantification, corrélations (interactions e/e, liquide de Fermi), réponse linéaire.

Transitions de phases, introduction aux effets topologiques

Supraconductivité (et autres fluides quantiques), ordres magnétiques complexes (*fractionalisation*),

Mais elle est **essentielle pour poser les bases...**

PLAN

I. Propriétés électromagnétiques (classiques) de la matière

- A. Transport (Drude : hypothèses, formulation, **temps de diffusion (1)** et **effet Hall (2)** en TD)
- B. Effets dépendants du temps : inductance cinétique et courant de polarisation
- C. Equations de Maxwell dans la matière
- D. Constante diélectrique (**Drude-Lorentz (3)** en TD), Plasmons (**compléments (4)** en TD)

2. Magnétisme et propriétés thermodynamiques de la matière

- A. Magnétisme (M,B,H et potentiel vecteur) (**cas d'une sphère/ J_s (5)** en TD)
- B. Réponse linéaire : paramagnétisme/diamagnétisme (**calculs (6)** en TD). Théorème de Bohr - van Leeuwen
- C. Energie et enthalpie libre. Application : désaimantation adiabatique
- D. Transition de phases (**diagramme H-T (7)** en TD). Ferromagnétisme (**parois de domaines (8)** en TD)

les points en noir seront approfondis en master, ceux en rouge sont spécifiques à ce cours

Chap. I

Propriétés électromagnétiques (classiques) de la matière

A. Conductivité électrique (modèle de Drude)

La **conductivité électrique**, σ représente la capacité d'un matériau à transporter un courant électrique. La densité de courant est alors reliée au champ électrique par $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ et la **résistance** R est elle reliée à la **résistivité** $\rho = 1/\sigma$ par la relation : $R = \rho l/S$

Cette **résistivité** est généralement de l'ordre de **quelques $\mu\Omega\text{cm}$ à 300K** mais elle peut néanmoins varier d'un facteur 1 ■ à 100 ■ et peut même atteindre $\rho \sim 10^{12} \mu\Omega\text{cm}$ ■

H	Li 9,55	Be 3,76	Na 4,93	Mg 4,51	K 7,47	Ca 3,45	Sc 56,2	Ti 39	V 20,2	Cr 12,7	Mn 144	Fe 9,98	Co 5,6	Ni 7,2	Cu 1,725	Zn 6,06	Ga 13,6	Ge	As	B	C	N	O	F	Ne	He												
																				Al 2,733	Si	P	S	Cl	Ar													
																				Ru 7,1	Rh 4,3	Pd 10,8	Ag 1,629	Cd 6,8	In 8	Sn 11,5	Sb 39	Te	I	Xe								
																				Tc	Ru 7,1	Rh 4,3	Pd 10,8	Ag 1,629	Cd 6,8	In 8	Sn 11,5	Sb 39	Te	I	Xe							
																				Ca 21	Ba 34,3	*	Hf 34	Ta 13,5	W 5,44	Re 17,2	Os 8,1	Ir 4,7	Pt 10,8	Au 2,271	Hg 96,1	Tl 15	Pb 21,3	Bi 107	Po 40	At	Rn	
																				Fr	Ra	**	Rf	D _b	S _g	B _h	H _s	M _t	D _s	R _g	C _n	U _{ut}	F _l	U _{up}	L _v	U _{us}	U _{uo}	
																				*	La 4,7	Ce	Pr 70	Nd 64,3	Pm 75	Sm 94	Eu 90	Gd 131	Tb 115	Dy 92,6	Ho 81,4	Er 86	Tm 67,6	Yb 25	Lu 58,2			
																				**	Ac	Th 14,7	Pa 17,7	U 28	Np	Pu	Am	Cm	Bk	Cf	Es	Fm	Md	No	Lr			

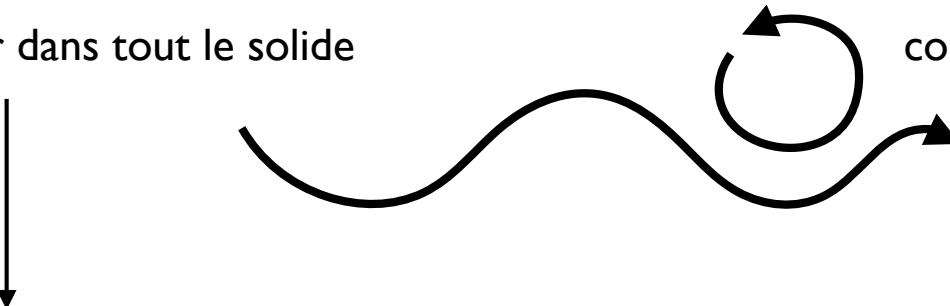
... dans les semi-conducteurs pour lesquels, la résistivité devient même INFINIE* (isolants = diélectriques) lorsque $T \rightarrow 0$ alors que pour certains composés la résistivité est au contraire parfaitement NULLE* à basse température (supraconducteurs).

* En « pratique » on ne peut ni mesurer l'infini ni zéro mais ~ 50 ordres de grandeurs séparent la résistivité de ces deux types de solides !

Le courant (transport de charges) est assuré par les électrons mais on peut distinguer :

Les *électrons de conduction* « libres »
de se déplacer dans tout le solide

Les *électrons de cœur* qui restent
confinés sur leur orbitale atomique



Comme il s'agit de décrire un très grand nombre de particules, Paul **Drude** (1863-1906)
prend un approche **statistique** classique comme base de départ au **début** du XX^e siècle :

théorie cinétique des gaz :

Les électrons sont alors supposés tous équivalents et à l'équilibre thermique avec le bain

ambiant, à la température T et $v_{\text{inst}} \sim \sqrt{kT/m} \sim 3.10^4 \text{ m/s}$.

De plus, Drude néglige les interactions e/e et **décrit l'interaction e/ions par des chocs** :
il suppose que les électrons subissent des collisions élastiques instantanées sur les ions, et que la
vitesse est redistribuée aléatoirement après le choc ($\langle v_{\text{inst}} \rangle = 0$)

Le temps moyen* entre deux chocs est alors \sim quelques distances inter-atomiques/ v_{inst}

$$\tau = l/v_{\text{inst}} \sim 10^{-9}/10^4 \sim 10^{-13} \text{ s}$$

* voir TD mais le calcul microscopique de τ est loin d'être aisé.... voir cours de transport en M2-MQ

et il en résulte une **force de « frottements »** $\vec{f}_{\text{frot}} = -m\vec{v}/\tau$

La probabilité de subir un choc (pendant dt) est dt/τ et on peut écrire (voir TD) :

$$\bar{p}(t+dt) = (\bar{p}(t) + dp)(1 - dt/\tau) + 0(dt/\tau) = (\bar{p}(t) + f_{\text{ext}} \cdot dt)(1 - dt/\tau) = \bar{p}(t) + f_{\text{ext}} \cdot dt - m\bar{v}/\tau dt \dots$$

Et il faut alors résoudre le PFD
(en omettant la notation \bar{v} dans la suite) :

$$-\left[m\frac{\vec{v}}{\tau} + e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})\right] = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

ou \vec{v} est donc la **vitesse moyenne de déplacement = vitesse de dérive [VOIR TD]**

En régime permanent (DC) : $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$

$$\begin{cases} v_x = -\frac{|e|\tau}{m}(E_x + v_y B_z - v_z B_y) = -\frac{|e|\tau}{m}(E_x + v_y B) \\ v_y = -\frac{|e|\tau}{m}(E_y + v_z B_x - v_x B_z) = -\frac{|e|\tau}{m}(E_y - v_x B) \\ v_z = -\frac{|e|\tau}{m}(E_z + v_x B_y - v_y B_x) = 0 \end{cases} \longrightarrow \text{et } v_y = 0 \text{ car le courant ne peut pas sortir par les bords latéraux}$$

donc

$$E_x = [-m/e\tau] \times v_x$$

pour un champ $B \parallel Oz$

et $E_y = [B] \times v_x$ (Effet Hall, voir TD)

et le courant traversant une surface S s'écrit : $I = \frac{dQ}{dt} = nqS \frac{dx}{dt} = -(nev)S = JS$

car dans l'approche classique de Drude **TOUS** les électrons de conduction sont **statistiquement équivalents** et participent tous au transport du courant avec la même vitesse v soit : $J = -nev$ et donc

$$j = -nev = \frac{ne^2\tau E}{m} \rightarrow \boxed{\sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}} \sim \frac{10^{29} \cdot 10^{-38} \cdot 10^{-13}}{10^{-30}} \sim 10^{-8} \Omega m : \textbf{OK !}$$

Bien que *conceptuellement* fausse (voir M1) car les électrons doivent être traités *quantiquement*, cette expression donne une (très) bonne approximation de la conductivité dans la majorité des métaux :

$$\sigma_{\text{quant}} = \sigma_{\text{class}} \times \frac{m}{m^*} \quad \text{masse effective } \sim 0.1-10$$

Et dans certains cas $\tau \rightarrow 0^*$ et le système devient **isolant** ou à l'opposé τ peut également devenir infini dans les **supraconducteurs**, (voir M2 : la résistance est parfaitement nulle = aucune perte pas effet Joule), d'où la formidable disparité de conductivité.

* dans d'autres cas (*isolants de bandes*, M1) la conduction est nulle car il n'existe pas de porteurs libres ($n \rightarrow 0$); voire même leur charge peut s'annuler ($e=0$: isolants « Kondo ») !

B. Effets dépendants du temps

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} + m \frac{\vec{v}}{\tau} + e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \vec{0}$$



En régime AC : $v = v_0 e^{-i\omega t}$, $\frac{d\vec{v}}{dt} = -i\omega\vec{v}$ $-i\omega mv + eE + mv/\tau = 0$ (avec $v_y = v_z = 0$ pour $E \parallel x$)

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau}$$

la conductivité est donc **complexe**

La résistivité ($\rho = 1/\sigma$) **augmente** avec la fréquence mais

A hautes fréquences ($\omega\tau \gg 1^*$) : $\rho(\omega) \rightarrow -i\rho_0\omega\tau = -i\frac{m}{ne^2}\omega = -i\frac{\omega}{\epsilon_0\omega_p^2}$

avec $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}} \sim 10^{15} \text{Hz}$: fréquence « plasma » (voir plus loin).

*ceci est vrai à toute fréquence dans le cas des **supraconducteurs pour lesquels** $\tau = \infty$. Ceci permet notamment la réalisation de capteurs ultrasensibles (KIDs) : observation du fond diffus cosmologique, etc...

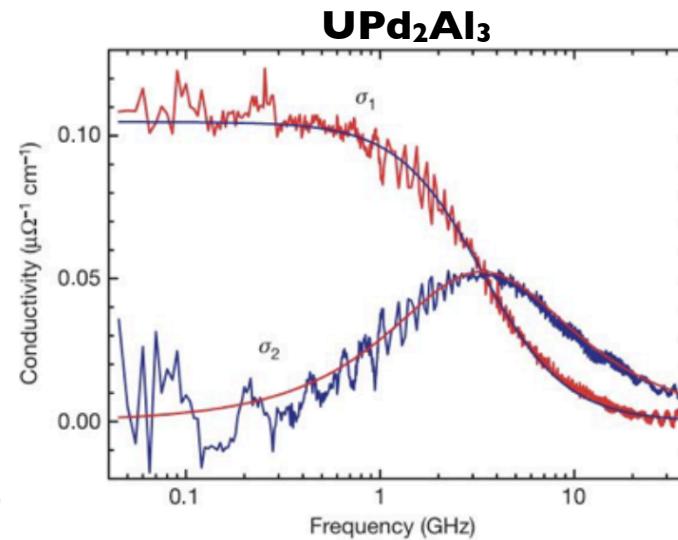
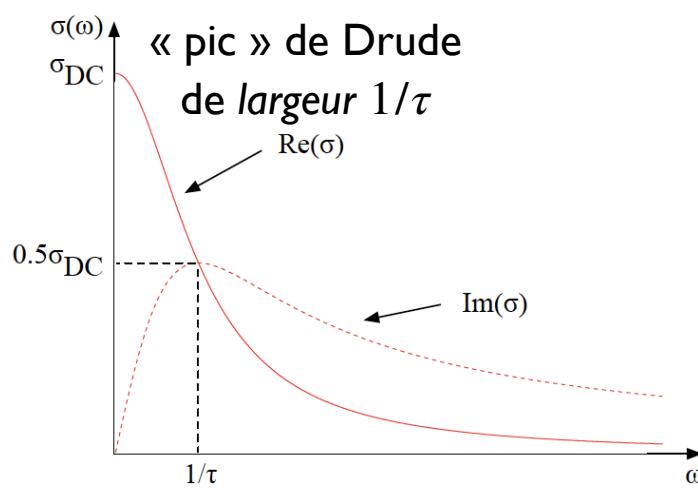
un métal se conduit donc comme une **inductance** (dite cinétique)

et non plus comme une résistance

l'énergie n'est plus dissipée par effet Joule mais **stockée** sous forme d'énergie cinétique,
cela aura une incidence sur les propriétés électromagnétiques (voir plus loin...)

énergie dissipée (effet Joule)

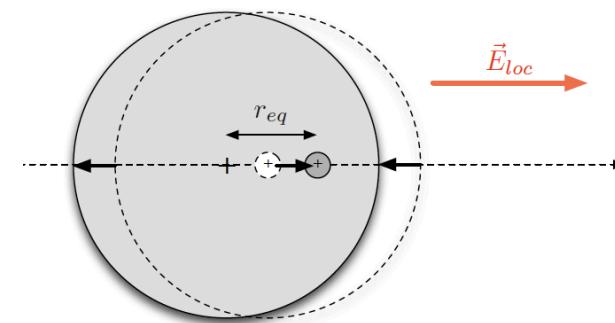
$$\begin{aligned}\Re(\sigma(\omega)) &= \frac{1}{1 + \omega^2\tau^2}\sigma_{DC} \\ \Im(\sigma(\omega)) &= \frac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}\sigma_{DC} \quad \longrightarrow \text{énergie stockée (énergie cinétique)}\end{aligned}$$



... et les électrons de cœur

bien qu'elles ne soient pas libres de se déplacer (donc $\sigma = 0$), ces charges **liées** aux noyaux peuvent « osciller » sous l'effet du champ électrique variable.

Les barycentres des charges + et - ne sont alors plus confondus conduisant à l'apparition d'un **moment dipolaire** (induit) $\vec{p} = q\vec{r}$ qui va créer à son tour un champ électrique induisant une « force de rappel » (théorème de Gauss) sur le nuage égale à $-m\omega_0^2\vec{r}$
avec $\hbar\omega_0 \sim 1 - 10 \text{ eV} \equiv 10^{16} \text{ Hz}$



Et pour un champ alternatif : $md^2r/dt^2 = -m\omega^2r = -m\omega_0^2r - ZeE$

$$\text{donc } \vec{r} = -Ze \frac{\vec{E}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \text{ et } \vec{p} = \frac{(Ze)^2}{m\omega_0^2\epsilon_0} \times \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \epsilon_0 \vec{E} = \alpha_{\text{at}}(\omega) \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\text{avec } \alpha_{\text{at}}(\omega) = \alpha_{\text{at}}(0) \times \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \text{ et } n\alpha_{\text{at}}(0) \sim \omega_p^2/\omega_0^2 \sim 1$$

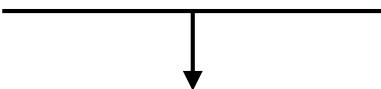
Remarque I : il est possible de tenir compte des effets « visqueux » (frottements $\propto - (m/\tau)(dr/dt)$) comme on l'a vu dans le cadre du modèle de Drude
= modèle de **Drude-Lorentz** = voir TD

Remarque II : Le champ local \vec{E}_{loc} n'est pas égal au champ appliqué \vec{E} (limite dense, voir TD) car il tient compte du champ créé par les **autres** dipôles et on peut montrer que $\vec{E}_{\text{loc}} = \vec{E} + \vec{P}/3\epsilon_0$ et en notant $\vec{P} = n\vec{p}$ la **polarisation** :

$$\vec{P} = n\alpha_{\text{at}}\epsilon_0(\vec{E} + \vec{P}/3\epsilon_0) \text{ soit}$$

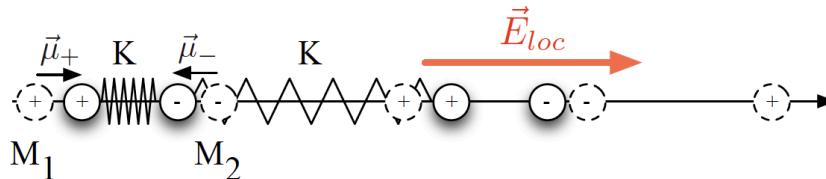
$$\vec{P} = \frac{3n\alpha_{\text{at}}}{3 - n\alpha_{\text{at}}}\epsilon_0\vec{E} = \chi_e\epsilon_0\vec{E}$$

avec $\chi_e(\omega) = \frac{3n\alpha_{\text{at}}(\omega)}{3 - n\alpha_{\text{at}}(\omega)} = \frac{3n\alpha_{\text{at}}(0)}{(3 - n\alpha_{\text{at}}(0)) - 3\omega^2/\omega_0^2}$ ou $\frac{\chi_e}{\chi_e + 3} = \frac{n\alpha_{\text{at}}}{3}$ **Clausius-Mossotti**



Si $\omega \rightarrow \omega_0\sqrt{1 - n\alpha_{\text{at}}(0)/3}\omega \lesssim \omega_0$, $\chi_e \rightarrow \infty$ et il peut exister des moments persistants même en l'absence de champ appliqué (= « catastrophe » de polarisation) = **Ferroélectriques**

Remarque III : dans les composés **ioniques** il existe également une polarisation liée au mouvement des ions. La force de rappel est encore linéaire (voir MI) $= -M\tilde{\omega}^2r$ où $\tilde{\omega}$ est cette fois la fréquence caractéristique de vibration des ions (appelée *phonons*) avec $\hbar\tilde{\omega} \sim 10^{-1} - 10^{-2} \text{ eV} \equiv 10^{13} \text{ Hz}$



et on obtient une **polarisabilité de déplacement**

$$\alpha_{\text{dep}} = \frac{(Ze)^2}{\epsilon_0 M \tilde{\omega}^2} \frac{\tilde{\omega}^2}{(\tilde{\omega}^2 - \omega^2)} \text{ et finalement } \alpha_{\text{tot}} = \alpha_{\text{at}} + \alpha_{\text{dep}}$$

C. Equations de Maxwell dans la matière

Dans TOUS les cas les équations de Maxwell doivent être vérifiées !

MAIS elles ne sont pas *auto-suffisantes*

: il faut introduire les **caractéristiques** du milieu...

on doit prendre en compte TOUTES les charges en présence

Lien flux de E
 \Leftrightarrow charge → $\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ $\vec{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ← Induction

(Maxwell-Gauss) (Maxwell-Faraday)

Conservation
du flux de B → $\text{div}(\vec{B}) = 0$ $\vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ ← Conservation
de l'énergie

(Maxwell-Flux) (Maxwell-Ampère)

et TOUS les courants...

par exemple dans le vide $J=0$ (et $\rho = 0$) \Rightarrow loi de propagation d'une onde EM = photon

Dans le matière, on doit alors connaître le lien entre J, E et B

On a donc déjà vu qu'il existe une densité de courant *libre* (pour les électrons de conduction) :

$$\vec{J}_l = \sigma(\omega)E$$

Mais il peut également exister une densité de courant de **polarisation** (pour les électrons de cœur) :

$$\vec{J}_p = \sum_i n_i q_i v_i = \sum_i n_i q_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = -i\omega\chi_e(\omega)\epsilon_0 \vec{E} = \vec{J}_p$$

Enfin, il nous reste à noter que les **boucles de courant** (microscopiques = orbitales atomiques) donnent lieu à **un champ magnétique interne** (Biot et Savart, voir **Chapitre 2**).

Ce champ appelé AIMANTATION est alors noté $\mu_0 \vec{M}$ et vient compléter le champ magnétique créé par des sources **extérieures**, noté lui $\mu_0 \vec{H}$

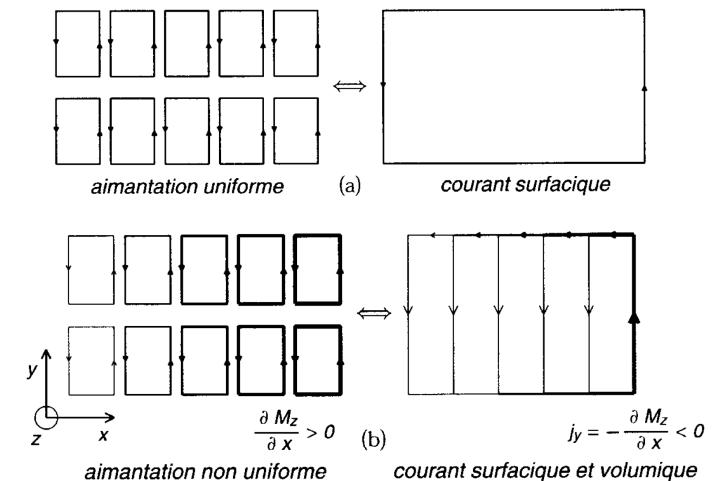
$$\text{On a donc : } \vec{B} = \mu_0(\vec{M} + \vec{H})$$

et ces boucles locales donnent lieu à une densité

$$\text{surfacique } \vec{J}_{sm} = \vec{M} \wedge \vec{n}$$

et, si l'aimantation n'est pas homogène, il apparaît également une densité de courant «magnétique» en

$$\text{volume : } \vec{J}_m = \text{rot} \vec{M}$$



Ces courants n'ont rien de *fictif* mais à la différence (essentielle) du courant de conduction dans les métaux, ils ne peuvent pas être « utilisés » à l'extérieur du matériau.

Enfin, notons que la conservation du courant $\operatorname{div} \vec{J}_P + \partial \rho_P / \partial t = 0$ montre que le courant de polarisation est alors associé à une **densité de charge** :

$$\rho_P = -\operatorname{div} \vec{P}$$

« compensée » (le solide reste globalement neutre) par une charge de surface $\sigma_P = \vec{P} \cdot \vec{n}$

Evidemment il n'y a **pas** de densité de *charge magnétique* ($\operatorname{div} \vec{J}_m = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{M} = 0$)

Les équations de Maxwell s'écrivent alors :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_d + \rho_p}{\epsilon_0}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 (\vec{J}_l + \vec{J}_p + \vec{J}_m) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

en introduisant

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

**= induction
électrique**

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_d$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}_l + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

où ρ_d correspond à des charges (défauts) pouvant exister dans le solide

Relations de continuité :

à l'interface entre deux milieux, on peut intégrer les deux premières équations sur un volume englobant cette interface

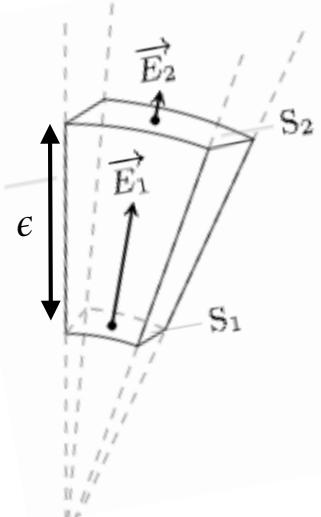
et avec (Green-Ostrogradski) $\int \operatorname{div} \vec{X} d\tau = \oint \vec{X} d\vec{S} = \Delta X_N \cdot S$

on trouve (N = normal à la surface), pour $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\overrightarrow{B_{N1}} = \overrightarrow{B_{N2}}$$

$$\overrightarrow{D_{N2}} - \overrightarrow{D_{N1}} = Q/S = \sigma_d \overrightarrow{n_{12}} \text{ (GAUSS)}$$

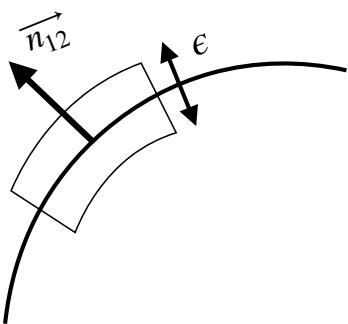
(densité surfacique de charge)



et en intégrant de même les deux secondes sur un contour englobant l'interface,

(avec Stokes $\int \operatorname{rot} \vec{X} d\vec{S} = \oint \vec{X} d\vec{l} = \Delta X_T \cdot l$)

on obtient (T = tangent à la surface), pour $\epsilon \rightarrow 0$:



$$\overrightarrow{E_{T1}} = \overrightarrow{E_{T2}}$$

$$\overrightarrow{H_{T2}} - \overrightarrow{H_{T1}} = \overrightarrow{J_{lT}} / l = \overrightarrow{J_{sl}} \wedge \overrightarrow{n_{12}} \text{ (AMPERE)}$$

(densité linéique de courant)

D. Constante diélectrique*

Le champ électrique **doit** respecter les équations de Maxwell,

$$\text{rot}(\text{rot}E) = \text{grad}(\text{div}E)^{**} - \Delta E = - \text{rot}(\partial B / \partial t) = - \mu_0(\partial J / \partial t + \partial^2 D / \partial t^2)$$

$$\Delta E = \mu_0 \underbrace{[\sigma(\omega) \partial E / \partial t]}_{\downarrow} + \epsilon_0 \underbrace{(1 + \chi_e(\omega)) \partial^2 E / \partial t^2}_{\downarrow}$$

la *spécificité* du solide : solide=métal

polarisabilité du nuage électronique (électrons de cœur)

Et si on en cherche (toujours) une solution de la forme $E \propto e^{i(kx-\omega t)}$ on a :

$$c^2 k^2 = c^2 \mu_0 [i\omega \sigma(\omega) + \omega^2 \epsilon_0 (1 + \chi_e(\omega))] = \omega^2 [1 + \chi_e(\omega) + i\sigma(\omega)/\epsilon_0 \omega] = \omega^2 \epsilon(\omega)$$

où $\epsilon(\omega) \neq 1$ est la **constante diélectrique** du milieu.

- **à haute fréquence** : $\omega_0 > \omega \gg \omega_p$, on peut négliger $i\sigma(\omega)/\epsilon_0 \omega$

on (re)trouve l'équation de **propagation** $\Delta E = \epsilon_0 \mu_0 (1 + \chi_e) \partial^2 E / \partial t^2$

$\epsilon(\omega) = \epsilon_\infty = 1 + \chi_e(\omega \rightarrow \infty)$ et la vitesse de propagation de l'onde électromagnétique
est simplement « renormalisée » par **l'indice** du milieu $n = \sqrt{\epsilon_\infty}$

* on supposera pour simplifier l'écriture des équations que $M=0$ mais si non il suffit de remplacer μ_0 par

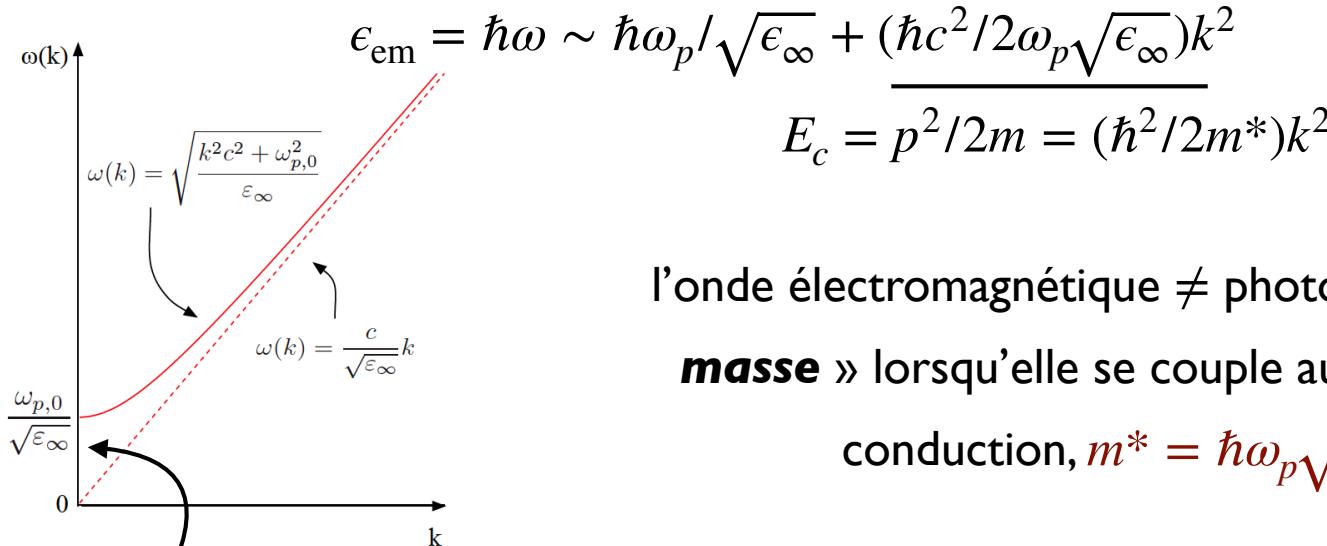
$\mu_0(1 + \chi_m)$ [voir chapitre 2]

** Nul si le système est neutre ($\rho = 0$).

- et **dans le domaine optique**, $\omega \sim \omega_p \gg 1/\tau$

$$\sigma(\omega) \sim j\epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \text{ et } \boxed{\epsilon(\omega) = \epsilon_\infty - \omega_p^2/\omega^2} \text{ peut devenir négatif...}$$

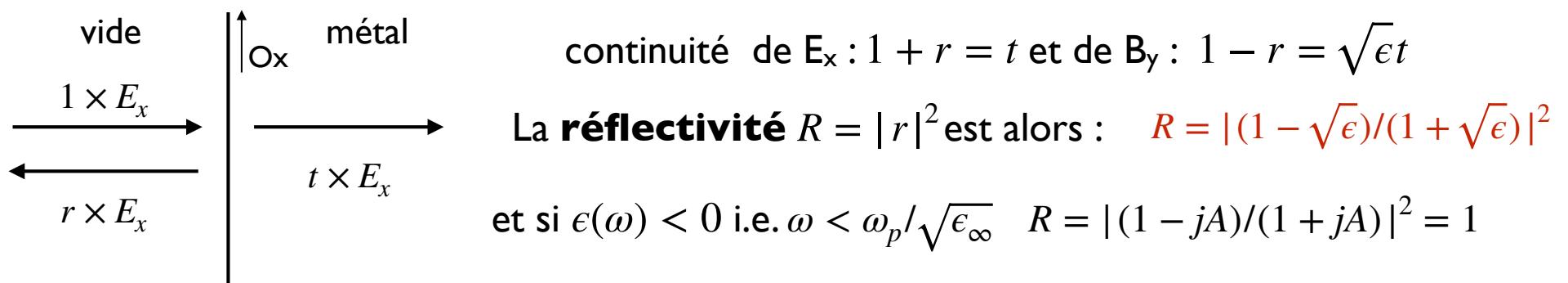
Le terme ω_p^2 correspond à l'**énergie cinétique** des courants induits :



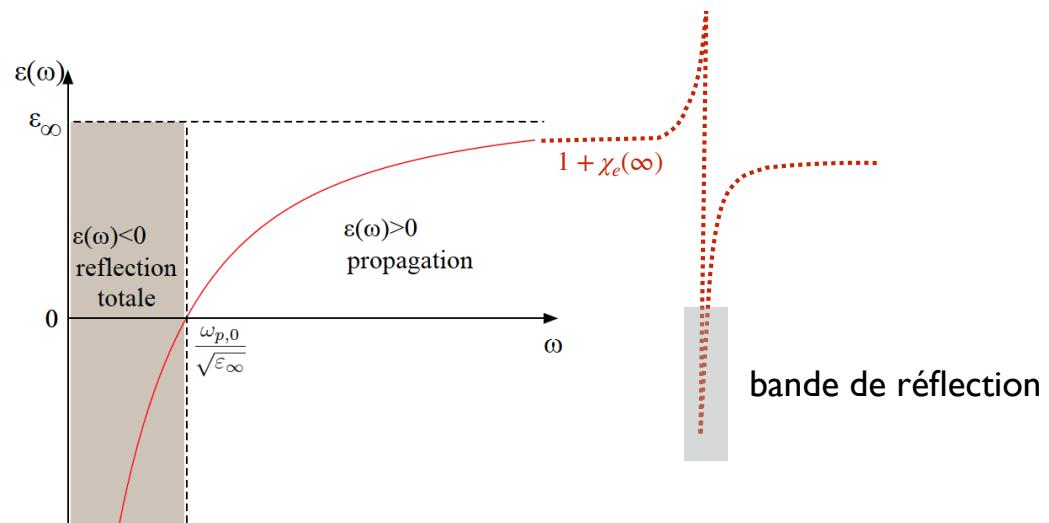
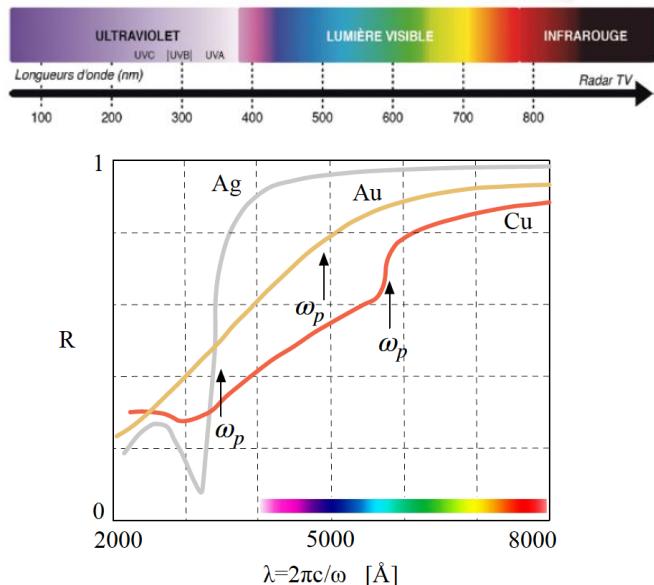
l'onde électromagnétique \neq photon « acquiert une **masse** » lorsqu'elle se couple aux électrons de conduction, $m^* = \hbar\omega_p\sqrt{\epsilon_\infty}/c^2$

$\epsilon < 0$: le métal devient parfaitement **réfléchissant**

En effet, si une onde électromagnétique vient frapper la surface d'un métal



et $\omega_p \sim$ fréquences visibles $\sim 4 - 7 \cdot 10^{14}$ Hz \Rightarrow couleur des métaux



pour l'**Argent** la fréquence plasma se trouve au delà du spectre du visible : toutes les fréquences sont réfléchies, alors que pour le **Cuivre** $\omega_p \sim$ vert et seul le jaune et le rouge sont réfléchis !

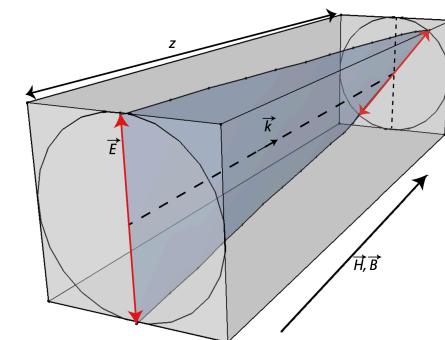
remarque I : on a écrit ici $\sigma(\omega) \sim j\epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega}$ mais on a vu (voir TD effet Hall) que σ est en fait un **TENSEUR** lorsque

$$B \neq 0 \text{ et on peut alors montrer que } [\epsilon] \sim \begin{pmatrix} 1 - \omega_p^2/\omega^2 & j(\omega_p^2/\omega^2) \cdot (\omega_c/\omega) \\ -j(\omega_p^2/\omega^2) \cdot (\omega_c/\omega) & 1 - \omega_p^2/\omega^2 \end{pmatrix}$$

pour $\omega > > \omega_c = eB/m$ ($B \parallel Oz$ et $E \parallel Oxy$)

Et si une onde de polarisation rectiligne ($\parallel Ox$) pénètre dans le matériaux ($\omega > \omega_p$), son axe de polarisation va tourner (= effet magnéto-optique) avec le champ d'un angle appelé **angle de Faraday**

$$\Phi_F \sim \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{z\omega_c}{2c} = \nu z B \quad \nu \sim 1^\circ/\text{mmT} \text{ pour } \omega \sim 10\omega_p$$



Remarque II : si l'onde frappe la surface (Oxy) avec un angle non nul, tel que

$$k_{1z} = k_{2z}/\epsilon \equiv \text{angle de Brewster}$$

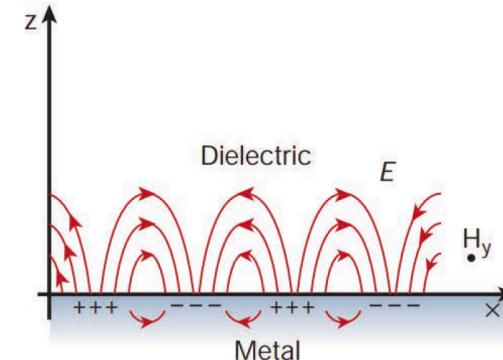
il n'y a **pas** de réflexion et les relations de continuité (**voir TD**) montrent alors que

l'onde EM se propage **parallèlement à la surface**.

On parle alors de **plasmon de surface**

qui s'accompagne d'une

modulation de la densité électronique en surface



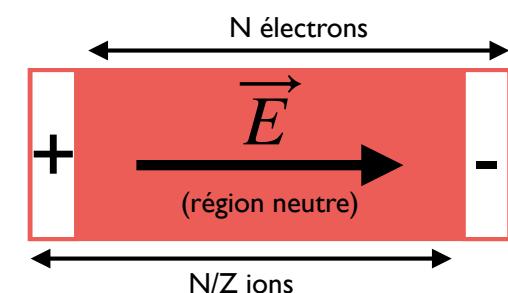
De même, l'équation de continuité $-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \text{div}(J) = \sigma(\omega)\text{div } \vec{E}$

$$\text{s'écrit : } (i\omega)\rho = \frac{\sigma(\omega)\rho}{\epsilon_0} = i\frac{\sigma_0\rho}{\epsilon_0\omega\tau} = (i\omega_p^2/\omega)\rho \quad (\omega\tau \gg 1)$$

Elle admet donc une solution oscillante (spontanée à $k=0$) de

la densité **volumique** de charges ($\rho(t) = \rho e^{-i\omega t}$) pour $\omega = \omega_p$

appelée **plasmon de volume**



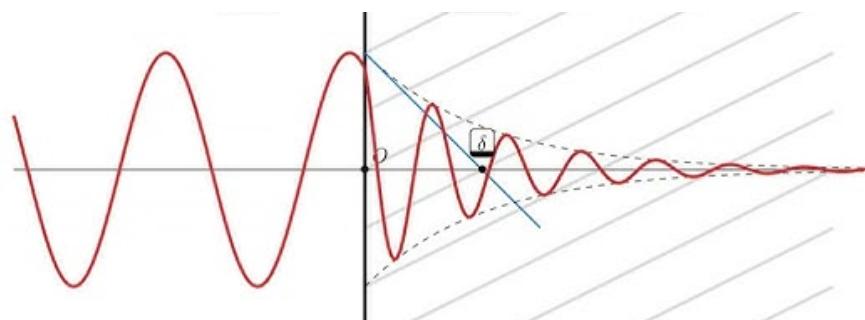
l'ensemble du nuage électronique oscille « de façon homogène » \Rightarrow apparition cette fois d'une densité surfacique de charge σ_s sur **les bords latéraux** qui crée un champ oscillant $E = \sigma_s/\epsilon_0$

- Enfin, **à basses fréquences** : $\omega_p \sim 10^{15} [\text{Hz}] \gg 1/\tau \gg \omega^*$,

on peut négliger $1 + \chi_e(\omega)$ et prendre $\sigma(\omega) \sim \sigma_0$ et $\boxed{\epsilon(\omega) = i\sigma_0/\epsilon_0\omega}$ ($\text{Re}\epsilon = -\omega_p^2\tau^2 \ll \text{Im}\epsilon$)

on a alors : $\Delta E = \mu_0\sigma_0\partial E/\partial t$ = équation de **diffusion**

$k^2 = i\omega[\mu_0\sigma_0]$ soit $k \sim \frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\mu_0\sigma_0}$: le champ électrique (et magnétique**) ne peut pénétrer que sur une épaisseur de peau : $\delta_{\text{em}} = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma_0\omega}} \sim 1\text{cm à } 50\text{Hz}$ et $2\text{\mu m à } 1\text{GHz}$ pour le cuivre ($\rho \sim 1\mu\Omega\text{cm}$)



* Dans les supraconducteurs, il existe un « épaisseur de peau » **statique** appelée longueur de pénétration de London $\lambda = c/\omega_p$. $\Delta \vec{B} = \vec{B}/\lambda^2$ et le champ magnétique **s'annule** au coeur du matériau (au delà de λ). C'est l'effet Meissner = propriété fondamentale des supraconducteurs (en plus de $R = 0$).

** Et bien sur également le courant.

Chap.2

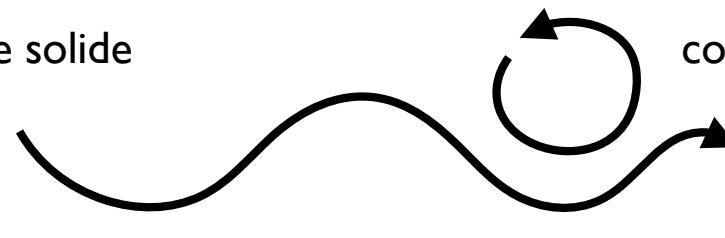
Magnétisme et propriétés thermodynamiques

A. Magnétisme dans la matière

Les *électrons de conduction « libres »*
de se déplacer dans tout le solide



les électrons libres peuvent également être amenés à décrire des boucles (notamment dans le cas des supraconducteurs)



Les *électrons de cœur* qui restent confinés sur leur orbitale atomique



Ces orbites sont des **boucles de courant** microscopiques
⇒ **création d'un champ magnétique interne**

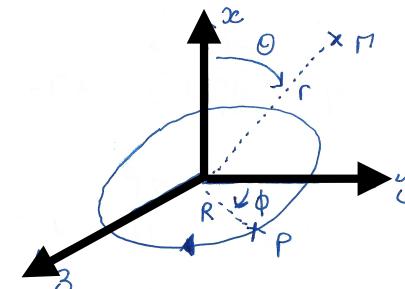
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\vec{dl} \wedge \vec{PM}}{||\vec{PM}||^3} \text{ (Biot et Savart)}$$

$$\vec{dl} = d\phi \begin{pmatrix} 0 \\ -R\sin\phi \\ R\cos\phi \end{pmatrix}, \quad \vec{PM} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta - R\cos\phi \\ -R\sin\phi \end{pmatrix} \text{ (en prenant } \overrightarrow{OM} \text{ dans le plan Oxy et la boucle dans le plan Oyz)}$$

$$\vec{dl} \wedge \vec{PM} = \begin{pmatrix} R^2 - rR\sin\theta\cos\phi \\ rR\cos\theta\cos\phi \\ rR\cos\theta\sin\phi \end{pmatrix} d\phi, \quad ||\vec{PM}||^2 = r^2 + R^2 - 2Rr\sin\theta\cos\phi$$

$$\text{et } \frac{1}{||\vec{PM}||^3} \sim \frac{1}{r^3} \left(1 + 3\frac{R}{r}\sin\theta\cos\phi\right) \text{ pour } r \gg R$$

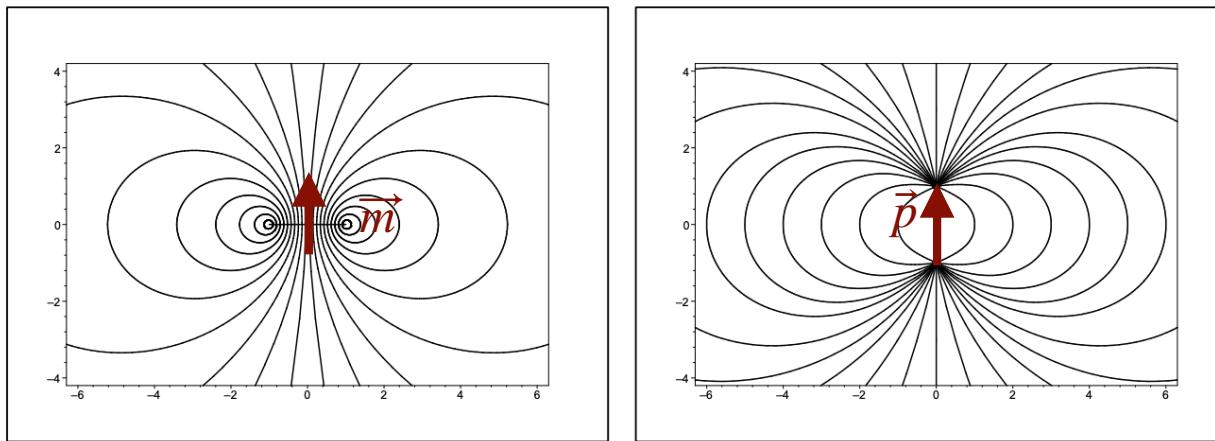
$$\text{et en intégrant } d\phi \text{ entre } 0 \text{ et } 2\pi \text{ on trouve : } \vec{B} = \frac{\mu_0 [I\pi R^2]}{4\pi r^3} \left[3\cos\theta \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$



et en introduisant le **moment magnétique** $\vec{m} = I\vec{S} = [I\pi R^2] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ on a

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\vec{m} \cdot \vec{u}_r)\vec{u}_r - \vec{m}]$$

Ce moment *magnétique* est le pendant du moment *dipolaire* associé à deux charges et (même s'ils diffèrent à courte distance) les champs \vec{B} et \vec{E} ont alors la même forme à longue distance



mais il n'existe **PAS de monopole magnétique...**

(...dans le vide, mais ils peuvent « artificiellement » exister dans la *glace de spins*)

On peut introduire le moment cinétique $\vec{L} = \vec{R} \wedge \vec{p}$ et en écrivant

$$I = dQ/dt = -e/T = -ev/2\pi R \text{ on a : } I\pi R^2 = \frac{-e}{2m_e} m_e v R \text{ soit}$$

$\vec{m} = \gamma \vec{L}$ où $\gamma = -e/2m_e$ est le rapport gyromagnétique

les moments *magnétiques* découlent donc de l'existence d'un moment *cinétique*. A ce stade (classique), ce moment cinétique est lié au *mouvement des électrons* (contribution orbitale) mais il existe également un moment intrinsèque, purement quantique, appelé **SPIN** que l'on n'étudiera pas plus en détails à ce stade (voir cours de mécanique quantique).

et pour une distribution volumique de moments, on peut alors définir

$$\textbf{L'AIMANTATION} : \vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV} = n\vec{m},$$

L'aimantation \vec{M} est donc le champ magnétique créé par les boucles **internes** et (comme on l'a mentionné) on doit également tenir compte du champ créé par les boucles **externes** (solénoïdes) que l'on note \vec{H} et on a finalement :

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0(\vec{M} + \vec{H})}$$

\vec{B} est alors (parfois) appelé : **INDUCTION magnétique**

La mécanique Lagrangienne (et Hamiltonienne) est basée sur l'existence d'un **potentiel**. Comme pour \vec{E} qui découle d'un **potentiel** (scalaire) V , l'induction \vec{B} découle elle d'un **potentiel vecteur** \vec{A} et pour satisfaire les équations de Maxwell ces deux potentiels sont reliés par :

$$\operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \rightarrow \vec{B} = \vec{\operatorname{rot}}(\vec{A})$$

$$\vec{\operatorname{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{--- induction}$$

Ils sont alors définis « à une constante près » (fonction scalaire χ) qui laisse invariante la physique

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}(\chi) \quad \text{et} \quad V' = V - \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

Fixer cette constante, c'est faire un *choix de Jauge*.

On peut (par exemple) prendre $\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$: **jauge de Lorenz**

(le potentiel obéit alors à la même équation de Maxwell que les champs)

Et en statique, on a $\operatorname{div} \vec{A} = 0$, on parle alors de **Jauge de Coulomb**.

Il existe alors :

- une énergie associée à ces dipôles : $E = - \vec{m} \cdot \vec{B}$
- un couple : $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$ (« alignement des boussoles »)
- et une force : $\vec{F} = (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$

Un aimant crée un champ \vec{B} et lorsqu'on le rapproche d'un autre matériau (**magnétique**)

$$M \sim B/\mu_0 \text{ et il apparaît une force } F_z \sim \frac{1}{2\mu_0} \cdot \frac{\partial B_z^2}{\partial z} \cdot V \approx \frac{B_z^2 S}{2\mu_0}.$$

ou S est la surface de contact.

Cette force est **attractive** : l'aimant colle sur le frigo !

Typiquement si $S \sim 5\text{cm}^2$

et pour un aimant créant un champ $B_z \sim B_0(z_0/z)^\alpha$ ($1 \leq \alpha \leq 3$) avec $B_0 \sim 0.2\text{T}$

pour $z = z_0$ (surface) on trouve $F_z \sim 10\text{ N}$ (1kg !)

mais plus que 1 N à $3z_0$ (pour $\alpha = 1$)...

Certains aimants peuvent avoir $B_0 \sim \text{qqT}$ (NdFeB) et pour $S \sim 50\text{cm}^2$ on arrive vite à 1 Tonne !

B. Réponse linéaire, susceptibilité

La force qui s'exerce sur les particules s'écrit $\vec{F} = q(\vec{v} \wedge \vec{B} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t})$ (ici $V = 0$)

et le théorème du moment cinétique s'écrit : $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F}$

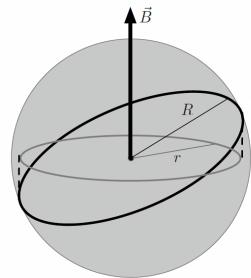
Le terme $-q\vec{r} \wedge \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ correspond à la force contre-électromotrice $e_{cem} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$ (induction).

Il en résulte (**voir TD**) une force $\vec{F}_{cem} = \frac{er}{2} \frac{\partial B}{\partial t} \vec{u}_\theta$ et on obtient par intégration :

$$\vec{L} = \frac{er^2}{2} \vec{B} + \vec{L}_0^* \text{ ou } r \text{ est le rayon de la boucle dans le plan perpendiculaire à } B \text{ (ici } ||Oz)$$

d'où l'apparition d'un moment **diamagnétique (de Larmor) moyen** : $m_z = -\frac{e^2 R^2 B}{6m_e}$

où R est maintenant le rayon de l'orbite et :



$$M_{dia} = -\frac{Ne^2 R^2 B}{6Vm_e} \sim -\frac{Ne^2 R^2 \mu_0}{6Vm_e} H = \chi_{dia} H$$

Réponse linéaire

en supposant ici que $\vec{B} \approx \mu_0 \vec{H}$ car $\chi_{dia} \sim -10^{-6}$ et donc $M \ll H$

(sauf pour les supraconducteurs pour lesquels $\chi_{dia} = -1$! et pour le graphite $\chi_{dia} \sim -10^{-4}$)

* bien qu'il s'agisse d'un phénomène d'induction le résultat **ne dépend pas du temps** !

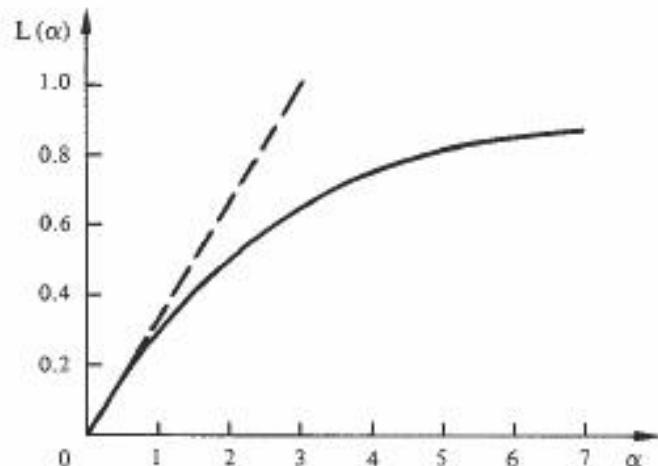
Et le terme : $q\vec{r} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{B}) = (q/m_e)(\vec{L} \wedge \vec{B})$

\Rightarrow **précession** des moments ($m = \gamma L$) autour du champ (voir TD)

Les moyennes (m_x, m_y) dans le plan perpendiculaire à \vec{B} sont nulles et une analyse statistique (voir TD) permet de montrer qu'il existe une aimantation moyenne non nulle (m_z) le long de \vec{B}
 (il est préférable d'aligner les moments avec \mathbf{B} pour minimiser l'énergie)

$$\langle m_z \rangle = m_{\text{para}} = m \times \mathcal{L}\left(\frac{mB}{kT}\right) \text{ où } \mathcal{L}(x) = \coth(x) - 1/x$$

= **paramagnétisme de Curie**



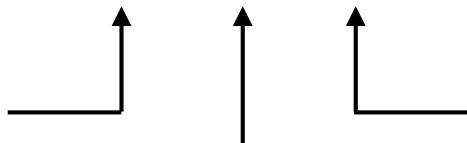
pour $x \gg 1$: $\mathcal{L}(x) \sim x/3$

Comme pour le diamagnétisme on a donc une réponse linéaire ($M = \chi_{\text{para}}H$) avec :

$$\chi_{\text{para}} \sim \frac{N\mu_0 e^2 L^2}{12m_e^2 V k T}$$

et $\chi_m = \chi_{\text{para}} + \chi_{\text{dia}}$ est appelée **SUSCEPTIBILITE** magnétique

paramagnétisme des électrons localisés (Curie)



diamagnétisme des électrons localisés (Larmor)

contributions des électrons libres (Pauli = voir MI) que l'on néglige ici

A ce stade, tout est juste et il ne reste(rait) qu'à estimer la valeur de L

En appliquant la **théorie cinétique des gaz**

$$\Rightarrow \frac{L^2}{\hbar^2} = \frac{p^2 R^2}{\hbar^2} = \frac{2mR^2}{\hbar^2} \cdot \frac{p^2}{2m} = \frac{2mR^2 kT}{\hbar^2}$$

et on trouve donc : $\chi_{\text{para}} = -\chi_{\text{dia}}$, donc $\chi_m = 0$!

Les solides ne possèdent **pas** de propriété magnétique à l'équilibre thermodynamique
théorème de Bohr (1911) van Leeuwen (1912).

Ce qui est bien évidemment **FAUX**
comme le montre l'expérience (le « magnet » colle bien sur le frigo...)
et le démontrera quelques année plus tard la mécanique quantique !

En effet, la mécanique quantique impose une **quantification** du moment cinétique $\frac{L_z}{\hbar} = \text{entier}$: la théorie cinétique des gaz ne s'applique **pas*** !

On conserve (pour les électrons localisés) le fait que :

$$\chi_{\text{para}} = C/T \text{ (loi de Curie**)} \text{ pour } H \rightarrow 0$$

mais avec $C \sim [1\text{K}]$ et donc $\chi_{\text{para}} >> -\chi_{\text{dia}}$

Remarque : tout comme on avait écrit $\vec{P} = n\alpha_{\text{at}}\epsilon_0(\vec{E} + \vec{P}/3\epsilon_0)$ pour le champ électrique, on doit en fait écrire $\vec{M} = \chi_{\text{para}}(\vec{H} - [N]\vec{M})$ pour ici tenir compte de la taille finie du solide = effets de bords

et $[N]$ est un tenseur 3×3 (dit démagnétisant), diagonal dans le repère des axes principaux de l'ellipsoïde avec $N_x + N_y + N_z = 1$ (pour une sphère $N_x = N_y = N_z = 1/3$)

$$\text{et } M = \frac{\chi_{\text{para}}}{1 + N\chi_{\text{para}}} H \quad (\text{en régime linéaire})$$

* Car les électrons ne sont pas tous « égaux » (principe d'exclusion de Pauli) et il faut utiliser une statistique quantique,

** mais on a toujours $m_{\text{para}} = m \times \mathcal{B}_m\left(\frac{mB}{kT}\right) \approx \frac{A}{T}H$ pour $H \rightarrow 0$ où \mathcal{B}_m est la fonction de **Brillouin** (voir MI)

C. Densité d'énergie électro-magnétique et enthalpie libre

$$\frac{1}{\mu_0}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} \cdot \vec{E}) = \frac{1}{\mu_0}(\vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} - \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B})) = \frac{1}{\mu_0}(-\vec{B} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}))$$

et l'équation de Maxwell : $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J} = \frac{\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}}{\mu_0}$ s'écrit alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \text{div} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) = -\vec{J} \cdot \vec{E}$$

Pertes (ou source)

densité **énergie électromagnétique**

$$d\epsilon_{\text{em}} = \epsilon_0 E dE + B dB / \mu_0$$

↓
rayonnée (ou transportée, vecteur de **Poynting**)

cette équation est donc une équation de **conservation de l'énergie électromagnétique**

Mais attention, cette densité énergie totale n'est pas uniquement celle du solide car elle comprend également la contribution de la source qui a créé le champ extérieur H :

$$d\epsilon_{\text{sources}} = \mu_0 H dH$$

et il faut tenir compte de l'énergie associée aux dipôles $d\epsilon_{\text{dip}} = -M dB$

Si on s'intéresse à la matière seule : $d\epsilon_{\text{mag}} = BdB/\mu_0 + (-MdB) - \mu_0 HdH = \mu_0 HdM^*$

La densité d'énergie totale (du solide) s'écrit alors :

$$du_{\text{sol}} = Tds - pdV/V + \mu_0 HdM^{**}$$

où s est l'entropie/unité de volume, p la pression.

Contrairement aux gaz « classiques », les variations de volume d'un gaz d'électrons sont (généralement) négligeables et $du_{\text{sol}} = Tds + \mu_0 HdM$

Le solide va-t-il alors minimiser son énergie interne ?

Non car les électrons sont couplées à un **bain thermique** et soumis au **champ extérieur**.

(et le nombre de particules = électrons est constant) :

l'ensemble est alors dit **CANONIQUE**.

Et l'énergie n'est PAS le *bon potentiel thermodynamique****...

* dans le cas d'un milieu polaire on aurait de façon totalement équivalente un terme supplémentaire : $-PdE$

** et pour être complet on devrait rajouter μdn (ou μ le potentiel chimique) dans un ensemble grand canonique

*** Un potentiel thermodynamique est une fonction d'état énergétique dont la **minimisation** indique l'**équilibre** d'un système sous des **contraintes** données = ici T et H imposés par l'extérieur

Les variables du problème ne sont donc **PAS s et M et mais T et H.**

Et on introduit alors **l'enthalpie libre** $g = u - Ts - \mu_0 HM$ et :

$$dg(T, H) = -sdT - \mu_0 MdH$$

$$\text{avec } \mu_0 M = -(\partial g / \partial H)_T \text{ et } s = -(\partial g / \partial T)_H$$

Et l'état d'équilibre du système est donc celui qui minimise g

la susceptibilité magnétique est la dérivée seconde de g par rapport à H : $\mu_0 \chi_m = -(\partial^2 g / \partial H^2)_T$
et la chaleur spécifique sa dérivée seconde par rapport à T : $c/T = -(\partial^2 g / \partial T^2)_H$.

Comme g (mais aussi s et M) est un **potentiel thermodynamique** :

(1) $dg(=ds=dM)=0$ sur un contour (transformation) fermé du plan H-T

(ce n'est pas le cas de la chaleur Tds notée alors δQ et non pas dQ ou le travail noté $\delta W = \mu_0 HdM$)
donc δQ et $\delta W \neq 0$ lors d'un cycle car chaleur et travail sont échangés avec l'extérieur...)

(2) **Les relations de Maxwell** (= égalité des dérivées croisées) sont vérifiées.

Par exemple : $(\partial s / \partial H)_T = (\partial(\partial g / \partial T)_H / \partial H)_T = (\partial(\partial g / \partial H)_T / \partial T)_H = \mu_0(\partial M / \partial T)_H$

Dans un composé paramagnétique $M = AH/T$

Soit $(\partial s/\partial H)_T = -\mu_0 CH/T^2$ et :

$$s = s_0(T) - \frac{\mu_0 AH^2}{2T^2}$$

↓ ↓
contribution électronique (et ions)

l'entropie magnétique diminue avec H : alignement des moments

et $ds = (s'_0(T) + \frac{\mu_0 AH^2}{T^3})dT - \frac{\mu_0 AH}{T^2}dH \sim \frac{\mu_0 AH^2}{T^2}(\frac{dT}{T} - \frac{dH}{H})$ à basse température ($s'_0(T)$ est alors négligeable).

Si on applique un champ H à un composé paramagnétique couplé à un bain thermique T ,
on diminue l'entropie du système en alignant les moments magnétiques.

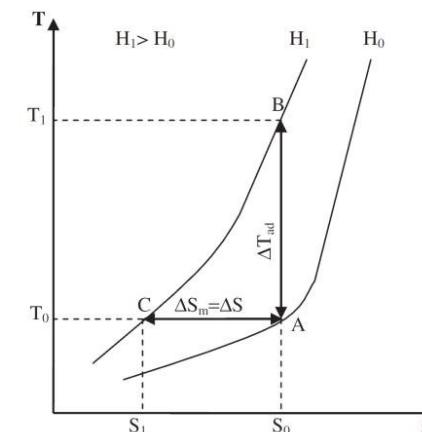
Si le système est ensuite isolé (= rendu **adiabatique** car il ne peut plus échanger de chaleur avec l'extérieur) et que l'on **décroît le champ**, les moments devraient se dés-aligner sous l'effet de l'agitation thermique mais ceci est impossible car $ds = 0$ donc la **température décroît**.

Cet effet est appelé **refroidissement par désaimantation adiabatique**.

(ou effet magnétocalorique)

$$ds = 0 \rightarrow dT/T = dH/H,$$

soit : $T_F/T_i = H_F/H_i$



Remarque I : on devrait donc avoir $T_F = 0$ si le champ est ramené à zéro mais la température finale est limitée par les « fuites thermiques » et en partant de la température de l'hélium $\sim 4\text{K}$ pour un champ de départ $\sim 1\text{T}$ on peut atteindre généralement des températures inférieures au **mK** en champ nul (record : 100pK !).

Remarque II : des études actuelles portent sur la recherche de matériaux ayant des

anomalies magnétiques proche de la température ambiante,



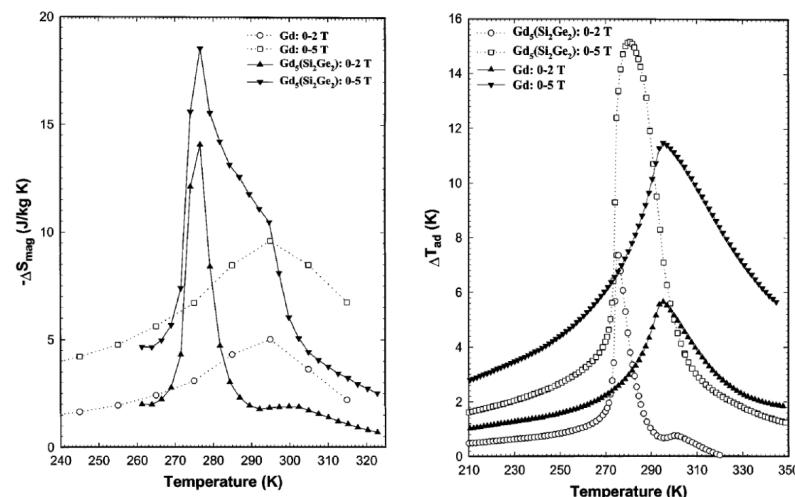
$$\text{Grand } (\partial s / \partial H)_T$$

$$s'_0(T) \rightarrow 3nk_B/T >> AH^2/T^3$$

$$ds = (3nk_B/T)dT + (\partial s / \partial H)_T dH$$

$$3nk_B\Delta T \sim -T\Delta H(\partial S / \partial H)_T \sim -T_{\text{amb}}\Delta S_{\text{mag}}$$

On peut (pourrait) ainsi de réaliser
des réfrigérateurs à $\sim T_{\text{amb}}$
sans fluide cryogénique,
ni pièces en mouvement.



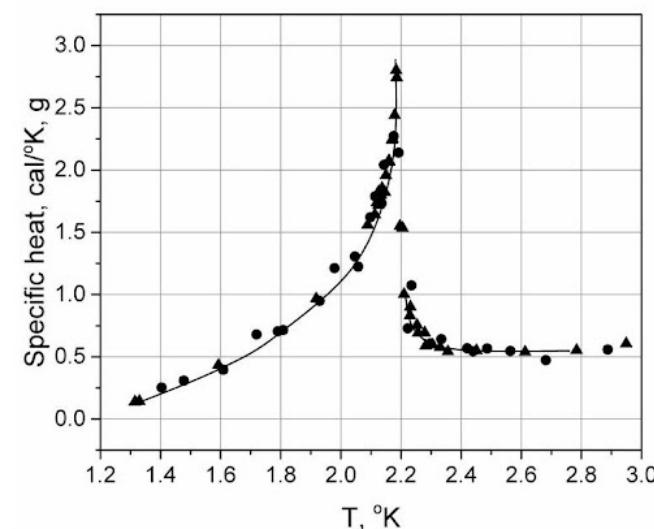
D. Transitions de phases (introduction)

Une transition de phases est une modification des propriétés du système induite par la variation d'un paramètre extérieur (par exemple la température).

Comme on l'a souligné, la nature privilégie la phase **de plus basse enthalpie libre** et à la transition $g_1(T_c) = g_2(T_c)$ mais le g **n'est pas analytique** (une de ces dérivées n-ième est discontinue).

Ehrenfest (1880-1933) proposa une classification des transitions de phases en fonction du degré de *non analyticité* : une transition est (serait) du n-ième ordre lorsqu'une des dérivées n-ième est (serait) discontinue.

Mais (i) aucune transition au delà du second ordre n'a été observée à ce jour et (ii) cette classification ne prévoit pas la possible divergence (sans discontinuité) de $(\partial s / \partial T)$ à la transition, qui elle a été observée (Superfluidité de l'Hélium, transition dite λ)



On ne distingue aujourd'hui plus que 2 types de transition (1^{er} ou second ordre) en fonction de l'existence ou non **d'une chaleur latente** ($T\Delta S$).
(pour les transitions du 1^{er} ordre, il peut également exister un hystérésis (surfusion de la glace))

(Généralement) une transition de phase s'accompagne d'une rupture de symétrie.

Landau introduit alors une variable appelée **paramètre d'ordre Ψ** permettant de tenir compte de cette rupture :

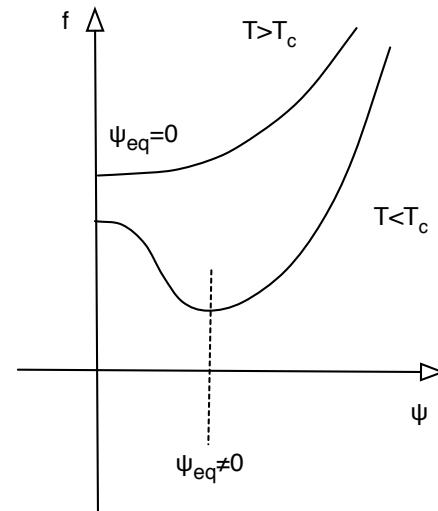
Par exemple : alliage AB cristallisant en structure cubique centrée. Si C est la concentration de A aux sommets des cubes on peut noter $\Psi = 1 - 2C$. Si tous les atomes A sont au centre $C = 0$ et $\Psi = 1$ (alliage ordonné) et si A et B sont réparties aléatoirement (alliage désordonné, $C = 1/2$) $\Psi = 0$. Dans certains cas le paramètre d'ordre est **inconnu** ! (on parle d'ordre caché)

Pour une transition du **second ordre** le paramètre d'ordre **s'annule** alors de façon continue et Landau proposa d'écrire : $g = f_0 - H\Psi + a(T)\Psi^2 + \frac{b}{2}\Psi^4$
(si le paramètre d'ordre se couple - ici linéairement - au champ extérieur H).

En **champ nul** $\frac{\partial g}{\partial \Psi} \Big|_{\Psi=\Psi_{\text{eq}}} = 0$ à l'équilibre (minimum de g)

i.e. $\Psi_{\text{eq}} = \sqrt{-a/b} \neq 0$ pour $T < T_c$ et $\Psi_{\text{eq}} = 0$ pour $T > T_c$
et $a(T)$ doit **changer de signe** à la transition.

La façon la plus simple est d'écrire $a(T) = a_0(T/T_c - 1)$



Et le paramètre d'ordre à l'équilibre tend bien **continument** vers zéro : $\Psi_{\text{eq}}(T) = \sqrt{\frac{a_0(1 - T/T_c)}{b}}$

Pour $T < T_c$: $g_{\text{eq}} = f_0 - a^2(T)/2b$ et l'entropie $s = -\frac{\partial g}{\partial T} = -f'_0 + \frac{a_0^2}{bT_c}(T/T_c - 1)$ est bien continue
mais $\frac{C}{T} = -f''_0 + \frac{a_0^2}{bT_c^2}$ chute brutalement à $-f''_0$ à la transition (discontinuité de $\frac{\partial^2 g}{\partial T^2}$) soit

$$\Delta(C/T) \sim a_0(\Psi_{\text{eq}}(0)/T_c)^2$$

Remarque : on peut formaliser les transitions du **1^{er} ordre** en rajoutant un terme en $-c\Psi^3$.

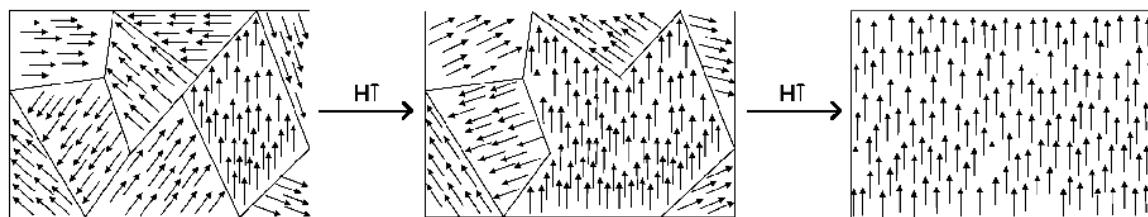
Le paramètre d'ordre passe alors **brutalement** de zéro pour : $T = T^* = T_c(1 + c^2/(2a_0b))$

Application au ferromagnétisme

Les **interactions** entre moments peuvent donner lieu à l'existence d'un moment magnétique non nul même en l'absence de champ extérieur = **AIMANT** = **FERRO**-magnétisme (équivalent aux FERRO-électriques déjà mentionnés).

On peut alors choisir comme paramètre d'ordre cette **aimantation spontanée** (en l'absence de champ appliquée)

Remarque : l'orientations des moments n'est pas « définies » : formation de **domaines** (microscopiques) homogènes (domaines de Weiss) séparées par des **parois** (voir TD)



dont la taille augmente avec le champ appliqué.

Lorsqu'on augmente la température, les moments vont se dés-ordonner : transition FERRO/PARA. On peut décrire cette transition et le formalisme de Landau montre alors que cette aimantation (spontanée) s'annule à la transition : $M(T,0) \propto \sqrt{1 - T/T_c}$

Pour un **champ non nul** : $-H + 2a\Psi + 2b\Psi^3 = 0$

Ψ_{eq} ne s'annule plus et il n'y a donc plus de transition

(les moments s'alignent - en partie - sur le champ)

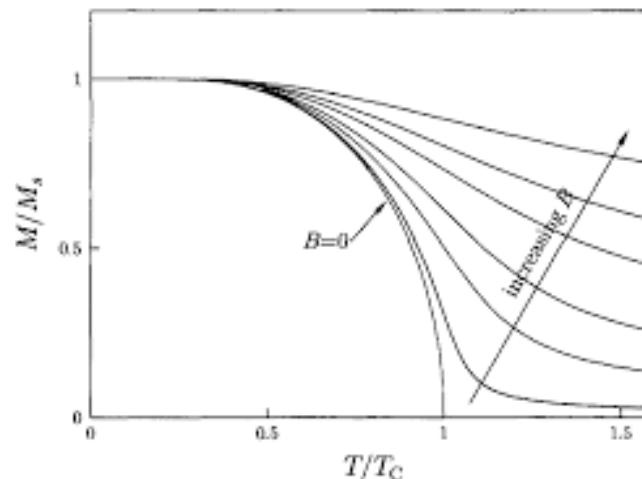
- De plus à T_c (définie donc en champ nul) : $\Psi_{eq}(T_c, H) = M = (H/2b)^{1/3}$
- Et pour $T > T_c$, $bM^2 \ll a$ (pour $H \rightarrow 0$) donc $\Psi_{eq}(T > T_c, H \rightarrow 0) \approx \frac{H}{2a}$

et la *susceptibilité* : $\frac{\partial \Psi_{eq}}{\partial H}(T > T_c, H \rightarrow 0) = \chi_m \sim \frac{1}{2a_0(T/T_c - 1)}$

En fait on peut montrer que (comme pour le paramagnétisme) : $\chi_m = \frac{\mu_0 N m^2}{3k_B V} \frac{1}{T - T_c}$

- Et pour $T \rightarrow 0$ on tend progressivement vers la solution

$$\Psi_{eq}(T \rightarrow 0, H) = M \approx \sqrt{-a/b}$$



En résumé, on a vu....

... est-ce robuste ?

	Classique	Quantique
Energie moyenne	$\langle E \rangle = 3k_B T/2$	NON : la théorie cinétique ne s'applique pas (niveau de Fermi)
Conductivité (des métaux)	$\sigma = (ne^2\tau/m)/(1 - i\omega\tau)$	OUI : exact pour les électrons <i>libres</i> mais pour de mauvaises raisons, sinon $m \rightarrow m^*$
Inductance cinétique	$\frac{dJ}{dt} = [\epsilon_0\omega_p^2]E$	OUI
Courant de polarisation	$J = [\epsilon_0\chi_e]\frac{dE}{dt}$	OUI
Effet Hall	$R_H = -1/ne$	OUI en moyenne, plateaux à basse température et plusieurs types de porteurs possibles
Aimantation	$\vec{B} = \mu_0[\vec{M} + \vec{H}]$	OUI
Théorème de Bohr - van Leeuwen	$\chi_p + \chi_d = 0$	NON : les effets paramagnétiques dominent (sauf supraconducteurs) et SPIN
Equations de Maxwell (dans la matière)	$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_l + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \dots$	OUI

Mais encore....

	Classique	Quantique
Effet de peau	$\delta_{\text{em}}^2 = 2/\mu_0\sigma_0\omega$	OUI
Plasmons	$k_{ } = (\omega/c)\sqrt{\epsilon/(\epsilon + 1)}$	OUI + particularités liées à la quantification + dépendance en k des plasmons de volume
Fonction diélectrique	$\epsilon(\omega) = \epsilon_{\infty} - \omega_p^2/\omega^2$	OUI pour la couleur (et gap) mais $\epsilon(k, \omega)$: écrantage Thomas-Fermi
Effet Faraday	$\Phi_F = \nu z B$	OUI
Enthalpie libre (du solide)	$dg(T, H) = -sdT - \mu_0 MdH$	OUI
Désaimantation adiabatique	$T_F/T_i = H_F/H_i$	OUI (la MQ montre que la contribution électronique à la chaleur spécifique est bien négligeable)
Transition de phases	$g = f_0 - H\Psi + a(T)\Psi^2 + \frac{b\Psi^4}{2}$	OUI (à compléter : fluctuations et possibilité de transitions quantiques)
Effets quantiques	Pas pris en compte	un monde à découvrir !