M1-Physique 2017-2018, Mécanique Quantique et Physique Atomique

1 feuille manuscrite RV autorisée, 3h

<u>Les parties A (10pts) et B (10pts) doivent être rédigées sur des copies séparées</u>

A. Particule dans un triple puits de potentiel

On note $|i>$ (i=1, 2 ou 3) l'état de la particule lorsqu'elle est dans le puits *i* et son énergie est alors $E_0=0$ (identique dans les trois puits), on suppose que $<i|j> = \delta_{ij}$. La particule peut passer d'un puits à l'autre par effet tunnel ce qui conduit à $H=\tau.(|1><2|+|2><1+|1><3|+|3><1+|2><3|+|3><2|)$.
On note *P* l'opérateur permutation défini par : $P|1>=|2>$, $P|2>=|3>$, $P|3>=|1>$.

1. Exprimez les opérateurs *H* et *P* sous forme matricielle dans la base $\{|1>, |2>, |3>\}$ et montrer que *H* et *P* commutent.
2. Montrer que les états propres de *P* peuvent s'écrire sous la forme : $|l_i> = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ l_i^2 \\ l_i \end{pmatrix}$ où les l_i sont les trois racines cubiques de l'unité ($l_i^3=1$). En déduire que le spectre de *H* est composé de 2 niveaux d'énergie : $E_1 = -\tau$ et $E_2 = 2\tau$ (on notera que $1 + l_i + l_i^2 = 0$ pour $l_i \neq 1$), préciser la dégénérescence de ces niveaux ainsi que la valeur de l_i qui y est associée.
3. La particule est dans l'état $|1>$ à t=0, exprimer cet état dans la base $\{|l_0>,|l_1>,|l_2>\}$ pour t=0 (on pourra utiliser pour cela la relation de fermeture) puis au bout du temps t.
4. Montrer que la probabilité de trouver la particule dans le puits numéro 2 au bout du temps t est $P_{12} = [\frac{2}{3}\sin(\frac{3\tau t}{2\hbar})]^2$. Exprimer P_{12} pour $t \to 0$ et retrouver ce résultat directement en considérant *H* comme une perturbation (dépendant du temps).

On suppose désormais que le processus de passage par effet tunnel n'est plus totalement symétrique, ce qui conduit à rajouter à l'Hamiltonien *H* la perturbation : $V=\delta.(|1><2+|2><1|)$.

5. Montrer que les valeurs propres de *H*+*V* sont : $E'_1 = -\tau - \delta$, $E''_1 = -\tau + \frac{\delta}{3}$, $E'_2 = 2\tau + \frac{2\delta}{3}$ (au 1^er ordre en perturbation). Pouvait-on s'attendre à cette levée de dégénérescence ?
6. Donner la correction à l'ordre 2 du niveau $E_2 = 2\tau$.
7. Montrer que L'état $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un état propre de *H*+*V* dont on précisera la valeur propre.
8. On note $|a>=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $|b>=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, exprimer *H*+*V* dans la base $\{|a>, |b>\}$ et diagonaliser cette matrice pour trouver les deux autres valeurs propres ($E_\pm$).
9. Faire un développement limité de $E_\pm$ au second ordre en δ/τ (rappel $(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$) et comparer ce résultat à celui obtenu en question 5 & 6, conclusion.

B. Etude d'un gaz d'atomes de rubidium (nouvelle copie)

Le rubidium est un élément de la première colonne du tableau périodique (numéro atomique 37)

1. Donner la configuration électronique de l'état fondamental de l'atome (*i.e.* la repartition des électrons sur les différentes couches et sous-couches). En déduire le terme spectroscopique ("term symbol" en anglais) de l'atome de rubidium dans l'état fondamental.

Nous allons considérer l'atome de Rubidium en phase gazeuse comme un système à deux niveaux : un niveau fondamental $|g\rangle$ (déterminé au dessus) et un niveau excité $|e\rangle$. Nous allons étudier un gaz de ce type d'atomes en interaction.

2. Expliquer pourquoi l'approche dans la première partie de cet examen (exercice A) basée sur la fonction d'onde n'est pas pertinente ici.

3. Rappeler l'équation d'évolution de l'opérateur densité décrivant l'ensemble des atomes sous l'effet d'un Hamiltonien H_0.

4. On note H_0 le Hamiltonien d'un système constitué d'un atome de rubidium à deux niveaux. En choisissant l'origine des énergies à la moyenne des énergies des deux niveaux, et en notant $\hbar\omega_{Rb}$ leur écart énergétique, écrire explicitement la matrice représentant H_0 dans la base $(|g\rangle; |e\rangle)$.

5. En déduire les équations d'évolution libre des éléments de la matrice densité ρ_{gg}, ρ_{ge}, ρ_{eg} et ρ_{ee}.

6. On va maintenant prendre en compte le fait que le système, dans l'état excité, peut retomber dans l'état fondamental sous l'effet de l'émission spontanée, avec une probabilité par unité de temps Γ. Réécrire les équations d'évolution libre des populations et des cohérences en y ajoutant le terme correspondant à l'émission spontanée. Vérifier que la trace de la matrice densité est conservée.

La longueur d'onde correspondant à la transition $|g\rangle \to |e\rangle$ (pour $|e\rangle$ correspondant au $5^2\mathrm{P}_{3/2}$) vaut $\lambda = 780$ nm (la raie D_2).

7. A température ambiante, l'énergie thermique des atomes peut-elle exciter les atomes via collisions ? (donner des arguments quantitatifs). Quelle est l'ordre de grandeur de la température minimale pour que cela se produise ?

Imaginons que les atomes subissent exclusivement des collisions élastiques. La probabilité pour un atome de subir une collision par unité de temps est notée γ.

8. Comment se traduit, sur les équations d'évolution des populations, l'hypothèse que les collisions sont élastiques ?

9. Quel sera l'effet de ces collisions sur les cohérences ? Ecrire les nouvelles équations d'évolution complètes des cohérences.

10. Supposant un gaz de rubidium ultrafroid de faible densité, avec $\Gamma = 38 \times 10^6\ s^{-1}$ et $\gamma = 10\ s^{-1}$, peut-on s'imaginer créer un chat de Schrödinger avec ce système (une superposition cohérente entre la moitié des atomes dans $|g\rangle$ et l'autre moitié dans $|e\rangle$) qui "vive" assez longtemps pour pouvoir l'observer expérimentalement ? Discuter.