

1 feuille manuscrite RV autorisée, 3h

Les parties 1 (10pts) et 2 (10pts) doivent être rédigées sur des copies séparées

Partie 1

A. Précession du spin et de l'impulsion dans un champ magnétique

Dans le cadre de l'équation de Dirac, le facteur gyromagnétique g de l'électron est égal à 2 mais lorsqu'on calcule l'interaction de l'électron avec le champ électromagnétique quantifié, on trouve une valeur de g légèrement différente de 2. Le but de cet exercice est d'étudier la mesure de la grandeur $g-2$. Dans un champ magnétique B statique, uniforme et dirigé suivant Oz , l'Hamiltonien de cet électron est :

$$H = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} + V(r) - \vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

où $\vec{A} = (\vec{B} \wedge \vec{r})/2$ est le potentiel vecteur, et $\vec{\mu} = \gamma \vec{S}$ est l'opérateur moment magnétique de spin avec $\gamma = g\gamma_0 = gq/2m = (1 + a)q/m$, où a est appelé "anomalie de moment magnétique" (m est la masse de l'électron et q sa charge et $\omega = qB/m$).

1. Montrer que l'Hamiltonien peut se ré-écrire sous la forme :

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r) + \frac{(qBr)^2}{8m} - \gamma_0 L_z B - \gamma S_z B$$

Donner le déplacement du niveau d'énergie fondamental de $H_0 = p^2/2m + V(r)$ du au terme $(qBr)^2/8m$ en théorie des perturbations du premier ordre. On suppose que $\sqrt{<0|r^2|0>} \sim 2l_c$ où l_c est le rayon de l'orbite cyclotron : $\sqrt{\hbar/qB}$, comparer ce résultat au résultat exact que l'on obtient en ne considérant que les trois premiers termes de l'Hamiltonien (dans le plan Oxy, on supposera ici que $p_z = 0$ et on notera $n = n_x + n_y$). Tracer le spectre en énergie en précisant la différence d'énergie entre deux niveaux successifs.

2. Donner la contribution en énergie liée au terme $-\gamma_0 L_z B$ ¹ et retracer le spectre en énergie. Enfin, dans le cadre de l'équation de Dirac, on prédit donc $a = 0$, tracer le spectre final prenant en compte l'ensemble des contributions (on néglige ici les contributions fines et hyperfines).

3. On note $\vec{v} = (\vec{p} - q\vec{A})/m$. Montrer que² $[v_x, v_y] = i\hbar\omega/m$, $[v_x, v_z] = [v_y, v_z] = 0$. Montrer que $[v_x, H] = i\hbar\omega v_y$ [on admettra que $[v_y, H]$ est alors égal à $-i\hbar\omega v_x$] et que $[v_z, H] = 0$.

4. On considère les trois moyennes $C_1 = < S_z v_z >$, $C_2 = < S_x v_x + S_y v_y >$ et $C_3 = < S_x v_y - S_y v_x >$. Utiliser le théorème d'Ehrenfest³ pour montrer que C_1 est une constante, $\dot{C}_2 = -\Omega C_3$ avec $\Omega = \omega$ [on admettra que \dot{C}_3 est alors égal à ΩC_2]. En déduire que $< \vec{S} \cdot \vec{v} > (t) = A_1 + A_2 \cos(\Omega t + \phi)$

5. Un faisceau monocinétique d'électrons interagit avec le champ B durant l'intervalle $[0; T]$ (on néglige les interactions mutuelles des électrons du faisceau). A l'instant T , on mesure une quantité proportionnelle à $< \vec{S} \cdot \vec{v} >$. Le résultat de cette mesure est présenté sur la Figure 1 pour

1. on rappelle que $< L_z > = n'\hbar$ et on admettra que $n' = -n, -n + 2, \dots, n - 2, n$

2. on rappelle que $[x, p_x] = i\hbar$

3. $i\hbar \frac{d<A>}{dt} = < [A, H] >$

B de 9.4 mT. E déduire une valeur approchée de l'anomalie a. L'électrodynamique quantique prévoit que $a = \alpha/2\pi$ (où $\alpha = 1/137$ est constante de structure fine). Conclusion.

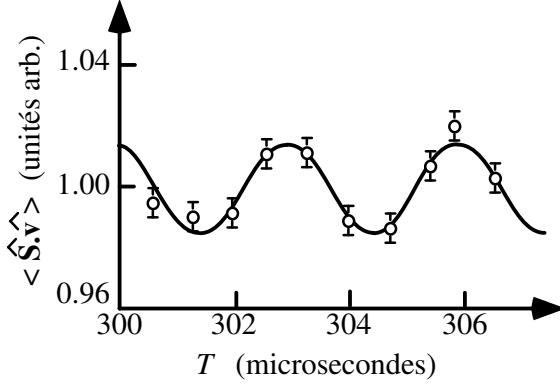


FIGURE 1 – Variation de la quantité $\langle \vec{S} \cdot \vec{v} \rangle$ en fonction du temps T.

B. Interactions entre particules confinées, énergie du condensat

On considère N bosons confinés dans un piège harmonique de pulsation ω . Ces particules interagissent deux à deux par un potentiel $v(r)$ tel que $\iint f(r_1)g(r_2)v(r_1 - r_2)d^3r_1d^3r_2 \approx (4\pi\hbar^2a/m) \int f(r)g(r)d^3r$. La grandeur a, appelée longueur de diffusion, est caractéristique de l'espèce atomique considérée, elle peut être positive (interaction répulsive) ou négative (interaction attractive). L'hamiltonien du système s'écrit :

$$H = \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{m\omega^2 r_i^2}{2} \right) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{v(r_i - r_j)}{2}$$

1. En l'absence d'interaction l'état propre du fondamental s'écrit :

$$\Phi_\sigma(r_1, r_2, \dots, r_N) = \phi_\sigma(r_1)\phi_\sigma(r_2)\dots\phi_\sigma(r_N)$$

où $\phi_\sigma(r) = (1/(\sigma^2\pi)^{3/4})\exp(-r^2/(2\sigma^2))$ avec $\sigma = a_0 = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$ (rayon de Bohr). Justifier brièvement la forme de Φ_σ et donner le spectre en énergie (à 3D).

$$\int |\phi_\sigma|^2 d^3r = 1; \int |\phi_\sigma|^4 d^3r = 1/[(2\pi)^{3/2}\sigma^3]; \int x^2 |\phi_\sigma|^2 d^3r = \sigma^2/2; \int |\partial\phi_\sigma/\partial x|^2 d^3r = 1/[2\sigma^2]$$

2. Calculer le déplacement du niveau d'énergie fondamental de H du fait des interactions entre les atomes en utilisant la théorie des perturbations du premier ordre. Commenter le signe de ce déplacement. A quelles conditions portant sur N cette approche perturbative est-elle valable ?

3. Pour trouver une estimation de l'énergie du niveau fondamental pour N grand on utilise la méthode variationnelle à partir de la fonction d'essai $\Phi_\sigma(r_1, r_2, \dots, r_N)$ (σ désormais variable). Calculer les valeurs moyennes de l'énergie cinétique, de l'énergie potentielle et de l'énergie d'interaction (en fonction de σ).

4. On introduit $\tilde{E} = E(\sigma)/(N\hbar\omega)$ et $\tilde{\sigma} = \sigma/a_0$. Montrer que $\tilde{E}(\tilde{\sigma}) = (3/4)(\tilde{\sigma}^2 + 1/\tilde{\sigma}^2) + \eta/\tilde{\sigma}^3$. Tracer schématiquement la fonction $\tilde{E}(\tilde{\sigma})$ pour $a > 0$ (interactions répulsives) pour différentes valeurs de η et montrer que l'énergie du fondamentale est proportionnelle à $N^{2/5}$ pour les grandes valeurs de η (suffisamment grandes pour pouvoir négliger la contribution de l'énergie cinétique). Discuter qualitativement le résultat obtenu pour $a < 0$ (interactions attractives) aux limites $|\eta| \ll 1$ et $|\eta| \gg 1$.

Partie 2

C. Termes Spectroscopiques

Déterminer les termes spectroscopiques correspondant à l'état fondamental des atomes suivants : Soufre (16 électrons) ; Calcium (20 électrons) ; Brome (35 électrons) ; Césium (55 électrons). Justifier votre réponse en vous référant aux règles de Hund.

D. Etude d'un gaz d'atomes de rubidium

Nous allons considérer l'atome de Rubidium en phase gazeuse comme un système à deux niveaux : un niveau fondamental $|g\rangle$ (déterminé au dessus) et un niveau excité $|e\rangle$. Nous allons étudier un gaz de ce type d'atomes en interaction.

1. Expliquer pourquoi l'approche apprise dans la partie mécanique quantique basée sur la fonction d'onde n'est pas pertinente ici.
2. Rappeler l'équation d'évolution de l'opérateur densité décrivant l'ensemble des atomes sous l'effet d'un Hamiltonien H_0 .
3. On note H_0 le Hamiltonien d'un système constitué d'un atome de rubidium à deux niveaux. En choisissant l'origine des énergies à la moyenne des énergies des deux niveaux, et en notant $\hbar\omega_{Rb}$ leur écart énergétique, écrire explicitement la matrice représentant H_0 dans la base $(|g\rangle; |e\rangle)$.
4. En déduire les équations d'évolution libre des éléments de la matrice densité ρ_{gg} , ρ_{ge} , ρ_{eg} et ρ_{ee} .

5. On prend désormais en compte le fait que le système, dans l'état excité, peut retomber dans l'état fondamental sous l'effet de l'émission spontanée, avec une probabilité par unité de temps Γ . Réécrire les équations d'évolution libre des populations et des cohérences en y ajoutant le terme correspondant à l'émission spontanée. Vérifier que la trace de la matrice densité est conservée.

La longueur d'onde correspondant à la transition $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$ (pour $|e\rangle$ correspondant au $5^2P_{3/2}$) vaut $\lambda = 780$ nm (la raie D₂).

6. A température ambiante, l'énergie thermique des atomes peut-elle exciter les atomes via collisions ? (donner des arguments quantitatifs). Quelle est l'ordre de grandeur de la température minimale pour que cela se produise ?

Imaginons que les atomes subissent exclusivement des collisions élastiques. La probabilité pour un atome de subir une collision par unité de temps est notée γ .

7. Comment se traduit, sur les équations d'évolution des populations, l'hypothèse que les collisions sont élastiques ?
8. Quel sera l'effet de ces collisions sur les cohérences ? Ecrire les nouvelles équations d'évolution complètes des cohérences.

E. Atome à trois niveaux

Cet exercice repose sur ce que vous avez vu dans les cours pour un système dit "à deux niveaux", mais vous allez ici ajouter un troisième niveau. On considère le système à trois niveaux généralisé sur la figure 2, dans lequel les états propres du hamiltonien non-perturbé H_0 d'un atome sont $|a\rangle$, $|b\rangle$ et $|c\rangle$. On introduit, pour mesurer leurs énergies respectives, les pulsations ω_a , ω_b et ω_c , telles que $H_0|a\rangle = \hbar\omega_a|a\rangle$, etc.

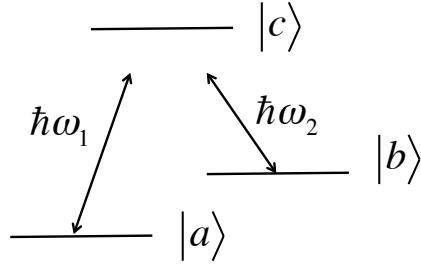


FIGURE 2 – Atome à trois niveaux

Tout vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ peut être décomposé sur la base des états stationnaires ($|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle$). On note α, β, γ les coefficients de cette décomposition en “représentation d’interaction”, c'est-à-dire telle que $|\psi(t)\rangle = \alpha e^{-i\omega_a t}|a\rangle + \beta e^{-i\omega_b t}|b\rangle + \gamma e^{-i\omega_c t}|c\rangle$.

On suppose que $|a\rangle$ et $|b\rangle$ ont la même parité et que la parité de $|c\rangle$ est opposée à la parité commune de $|a\rangle$ et $|b\rangle$.

1. Indiquer, parmi les six éléments non-diagonaux de l’opérateur d_x (dipôle électrique de l’atome suivant la direction Ox) quels sont les quatre d’entre eux qui sont non-nuls. En déduire qu’il y a une transition interdite dans ce système à trois niveaux (si on ne considère que le couplage dipolaire électrique entre l’atome et la lumière).

2. On éclaire l’atome avec de la lumière polarisée rectilignement suivant l’axe Ox , dans laquelle le champ électrique est décrit par la fonction $E(t)$. Ecrire le hamiltonien H (H_0 plus l’interaction dipolaire électrique) pour le système et l’appliquer sur l’état $|\psi(t)\rangle$.

3. Ecrire l’équation de Schrödinger dépendant du temps en utilisant le résultat de la question 2 (partie C) et en développant la dérivée temporelle de $|\psi(t)\rangle$.

4. Projeter cette équation sur respectivement $|a\rangle$, $|b\rangle$ et $|c\rangle$, pour obtenir le système d’équations linéaires qui donne, en fonction de α, β et γ , les dérivées par rapport au temps $\dot{\alpha}, \dot{\beta}$ et $\dot{\gamma}$ (utiliser le résultat de la question A pour éliminer rapidement les termes nuls). On pourra noter $\langle a|d_x|c\rangle = d_1$ et $\langle b|d_x|c\rangle = d_2$ et supposer ces éléments de matrice réels.

5. On suppose le champ exciteur bichromatique : $E(t) = E_1 \cos(\omega_1 t) + E_2 \cos(\omega_2 t)$. On suppose aussi que ω_1 et ω_2 sont des pulsations respectivement proches de $\omega_c - \omega_a$ et $\omega_c - \omega_b$ (et que ω_1 et ω_2 sont très différentes). En admettant que seuls les termes lentement variables des dérivées temporelles peuvent, par intégration, conduire à des contributions importantes dans les amplitudes, réécrire les équations précédentes en n’y gardant que les termes dont les facteurs temporels explicites ont les fréquences les plus basses. On montrera par exemple qu’avec cette approximation : $i\hbar\dot{\alpha} = -\frac{d_1 E_1}{2} \gamma e^{i\Delta_a t}$, où $\Delta_a = \omega_1 - \omega_c + \omega_a$. En posant de même $\Delta_b = \omega_2 - \omega_c + \omega_b$, donner l’expression analogue de $i\hbar\dot{\beta}$ et, dans la même approximation, celle de $i\hbar\dot{\gamma}$.

6. Montrer sur un schéma de niveaux ce que représentent les différences Δ_a et Δ_b .