Mécanique Quantique L3-PHYSIQUE

EXAMEN DE PREMIERE SESSION - MAI 2012

3 heures, documents manuscrits autorisés

A. On considère deux paquets d'ondes gaussiens nettement séparés à l'instant initial et se propageant l'un vers l'autre [1]. Les deux paquets d'ondes représentent chacun le mouvement du centre de masse d'un atome. On suppose que la fonction d'onde à l'instant initial peut s'écrire : $\Psi(x, t = 0) = A[exp(-(x + b)^2/2a^2)exp(ip_0x/\hbar) + exp(-(x - b)^2/2a^2)exp(-ip_0x/\hbar)]$.

1. Que représentent les quantités a, b et p_0. On choisit comme valeurs des paramètres : $b = 4\pi a$ et $p_0 = 2\pi\hbar/a$, tracez l'allure de $|\Psi(x, t = 0)|^2$.
2. Pour calculer l'évolution temporelle de Ψ, on suppose que la relation de dispersion est de la forme $\omega = \hbar k^2/2m$. Quelle(s) hypothèse(s) fait-on en écrivant la relation de dispersion sous cette forme ?
3. Donnez l'expression de $\Psi(x, t)$ et de la densite de probabilité associée. A quel instant (t_1) les centres des paquets d'ondes coïncident-ils ?
4. Montrez que le système est alors le siège d'interférences (matière + matière = absence de matière !). Calculez l'interfrange correspondant.
5. Tracez l'allure de $|\Psi(x, t_1)|^2$ et donnez la densité de probabilité maximale ($|\Psi(x, t_1)|^2_{max}$).

B. On considère un puits de potentiel de la forme $V(x) = -a\delta(x)$ où a est une constante réelle positive et $\delta(x)$ la fonction de Dirac. Tout l'exercice est traité en dimension 1 (x).

1. Ecrivez l'équation de Schrödinger pour une particule dans ce potentiel.
2. Donnez l'expression générale des solutions stationnaires ($\Phi(x)$) dans les régions $x < 0$ et $x > 0$.
3. Que peut-on dire de la fonction d'onde et de sa dérivée en $x = 0$.
4. Intégrez l'équation de Schrödinger stationnaire entre $-\epsilon$ et $+\epsilon$ ($\epsilon \to 0$) pour montrer que [2] : $\Phi'(0^+) - \Phi'(0^-) = -2ma/\hbar^2\Phi(0)$

   On s'intéresse tout d'abord au cas E < 0.

5. Les états sont-ils alors liés ou diffusifs ?
6. Précisez la forme de la fonction d'onde obtenue en Q.2 (pour $x > 0$ et $x < 0$) ainsi que les deux équations aux limites en $x = 0$.
7. En deduire que ce potentiel n'admet qu'une seule solution stationnaire. Donnez l'énergie de cet état ainsi que la fonction d'onde normalisée qui lui est associée.

---

1. On pourra le cas échánt utiliser les relations démontrées en TD sans démonstration.
2. $\Phi' = d\Phi/dx$.

Considérez maintenant le cas E > 0.

8. Précisez quelle est la forme de la fonction d'onde obtenue en Q.2 dans ce cas (pour $x > 0$ et $x < 0$).
9. On suppose qu'une particule se déplace de la gauche vers la droite (en provenant des $x < 0$). Calculez le coefficient de transmission, T en $x = 0$.

C. L'Halmiltonien d'une particule chargée en présence d'un champ magnétique $\vec{B} = \vec{rot}\vec{A}$ s'écrit $H_0 = (\vec{p}-e\vec{A})^2/2m+e\phi$ où le potentiel ϕ est relié au champ électrique ($\vec{E}$) par la relation $\vec{E} = -\vec{\nabla}(\phi) - \partial\vec{A}/\partial t$. Afin de justifier la forme de H_0 on se propose de calculer "l'équation du mouvement" associée à cet Hamiltonien.

1. Utilisez le théorème d'Ehrenfest pour montrer que $\frac{d<x>}{dt} = \frac{<p_x - eA_x>}{m}$.
2. Montrez que $\frac{d<p_x>}{dt} =< \frac{e}{m}[(p_x - eA_x)\frac{\partial A_x}{\partial x} + (p_y - eA_y)\frac{\partial A_y}{\partial x} + (p_z - eA_z)\frac{\partial A_z}{\partial x}] - e\frac{\partial \phi}{\partial x} >$.
3. En déduire [3] que $m\frac{d^2<x>}{dt^2} =< eE_x + e(\frac{dy}{dt}B_z - \frac{dz}{dt}B_y) >$. Conclusion.

D. On s'intéresse à l'énergie de l'électron d'un atome d'hydrogène en présence d'un champ magnétique ($\vec{B}$) selon Oz. On prend le potentiel vecteur ($\vec{A}$) de la forme $(-By/2, Bx/2, 0)$.

1. Justifiez que l'Hamiltonien s'écrive alors $H = H_0 - \frac{e\hbar B}{2m}\sigma_z$ où H_0 est l'Hamiltonien introduit ci-dessus (exercice C) et σ_z la matrice de Pauli en z (dont on rappellera la forme).
2. Montrez que $H = \frac{p^2}{2m} - \frac{eB}{2m}(L_z + \hbar\sigma_z) + e\phi$ où L_z est le moment cinétique selon z.
3. Rappelez quelle est la forme des solutions (stationnaires) de cette équation en l'absence de champ extérieur. Donnez (sans démonstration) le spectre des niveaux d'énergie correspondants. On suppose que l'électron est dans l'état $2p$, quelle est la dégéneresence de cet état (toujours pour $B = 0$) ?
4. Montrez que cette dégéneresence est (partiellement) levée par le champ B (on donnera la répartition des nouveaux niveaux d'énergie par rapport au niveau initial E_{2p}).
5. Quel autre effet peut lever (partiellement) la dégéneresence du niveau E_{2p} ?

---

3. Rappel : $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$