Mécanique Quantique L3-PHYSIQUE

EXAMEN DE PREMIERE SESSION - MAI 2015

3 heures, documents manuscrits autorisés

A. Une fonction d'onde à une dimension est donnée par $\Phi(x) = C_0 exp(-\alpha x^2/2)$ où α et C_0 sont des constantes réelles.

1. Que représente $|\Phi(x)|^2$? Calculer C_0 pour que $\Phi(x)$ soit normée [1]. Tracer $|\Phi(x)|^2$.
2. Calculer la valeur moyenne de x (notée $< x >$) et la valeur moyenne de x^2 (notée $< x^2 >$). En déduire Δx. Donner l'interprétation physique de cette quantité.
3. p est la quantité de mouvement associée à cet oscillateur. Calculer la valeur moyenne de p (notée $< p >$) et la valeur moyenne de p^2 (notée $< p^2 >$). En déduire Δp. Donner l'interprétation physique du produit $\Delta p \Delta x$ (dont on donnera la valeur).
4. L'énergie potentielle de la particule est $V(x) = m\omega^2 x^2/2$ (avec $\alpha = m\omega/\hbar$) . Donner les expressions des valeurs moyennes de l'énergie cinétique, de l'énergie potentielle et de l'énergie totale. Conclusion.
5. Ecrire l'hamiltonien H et calculer $H\Phi(x)$ en fonction de $\Phi(x)$. Conclusion.
6. Ecrire la fonction d'onde à l'instant t. Recalculer $< x(t) >$ et $< x(t)^2 >$. Conclusion.

B. On considère un système physique dont l'espace des états est de dimension 3 et possédant une base orthonormée $|u_1 >$, $|u_2 >$, $|u_3 >$. Soit A une observable dont l'action sur chaque vecteur de la base est donnée par : $A|u_1 >= \alpha|u_1 >$; $A|u_2 >= 0$; $A|u_3 >= \alpha|u_3 >$ avec α réel.

1. Ecrire la matrice représentant A dans la base $|u_1 >$, $|u_2 >$, $|u_3 >$. Est-elle hermitique ? Donner les valeurs propres et les vecteurs propres de A, en précisant la dégénérescence éventuelle de chaque valeur propre.
2. Le système physique se trouve dans l'état $|\Phi_1 >= 1/\sqrt{2}(|u_1 > -|u_2 >)$. Cet état est-il normé ? Est-il état propre de A ? Dans cet état, quel(s) résultat(s) peut-on trouver quand on mesure A, avec quelle probabilité ? Pour chaque résultat possible, préciser l'état du système juste après la mesure. En déduire la valeur moyenne de A pour cet état.
3. Le système physique se trouve dans l'état $|\Phi_2 >= 1/\sqrt{2}(|u_1 > -|u_3 >)$. Cet état est-il état propre de A ? Si oui, à quelle valeur propre est-il associé ?
4. On considère dans cette question l'hamiltonien H, dont l'effet sur les vecteurs de la base est le suivant : $H|u_1 >= B/\sqrt{2}|u_2 >$; $H|u_2 >= B/\sqrt{2}(|u_1 > -|u_3 >)$; $H|u_3 >= -B/\sqrt{2}|u_2 >$. Donnez la matrice de H dans la base $|u_1 >$, $|u_2 >$, $|u_3 >$. Est-elle hermitique ? Déterminer les valeurs propres de H (notées E_1, E_2, E_3) et les vecteurs propres normés de H, associés à chacune de ces valeurs propres.

---

1. On donne $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x^2) dx = \sqrt{\pi/\alpha}$

5. A quel phénonème physique cet Hamiltonien est-il relié si $B = \mu_B H$, où μ_B est le magnéton de Bohr et H un champ magntique ?
6. Calculer le commutateur de H et A. Quelle est la conséquence de ce résultat ?
7. Pour l'état $|\Phi_2>$, quels sont les résultats possibles pour la mesure de l'énergie, ainsi que leur probabilité respective. En déduire $< H >$.
8. Pour l'état $\Phi_1 >$, on mesure la grandeur physique associée à A, **puis** l'énergie du système. Décrire les différents résultats obtenus dans ce cas en fonction des valeurs obtenues pour A, préciser l'état du système après chaque mesure). Obtient-on les mêmes résultats si on mesure l'énergie du système, puis la grandeur physique associée à A.

C. On considère un électron de masse m confiné dans une boîte de potentiel cubique définie par : $V = 0$ si $0 < x < a$; $0 < y < a$; $0 < z < a$ et $V = \infty$ en dehors. L'origine est choisie sur un des sommets du cube.

1. Vérifier que les fonctions propres de l'Hamiltonien peuvent se mettre sous la forme : $\Psi = \Phi(x)\Theta(y)\Xi(z)$, les énergies étant $E_{tot} = E_x + E_y + E_z$. Rappelez (sans démonstration) la forme des fonctions Φ, Θ, Ξ et donner les énergies associées. Donner les énergies (E_+0 et E_1) des deux premiers états et leur dégénérescence (discuter quelles sont les origines de cette dégénérescence). Calculer ensuite ces énergies en eV pour $a = 6.7\AA$.
2. Le cube est déformé à volume constant pour passer à un parallélépipède à base carrée et de hauteur $a/2^{2/3}$ selon z. Donner les fonctions propres normées et les énergies des deux premiers états et montrer que la déformation lève partiellement la dégénérescence du niveau E_1 du cas non déformé.
3. On envoie un photon d'énergie $E = h\nu$ sur l'électron se situant dans la boîte de potentiel cubique dans l'état fondamental. Etablir l'expression de la longueur d'onde du photon pour qu'il soit absorbé en fonction de a. Si on envoie de la lumire blanche sur la boîte quelle sera la couleur de la lumière absorbée et de celle qui est transmise pour $a = 6.7\AA$[2].
4. Quelles sernt les nouvelles couleurs absorbées et tansmises dans le cas de la boîte déformée ?[3]

---

2. le spectre du visible s'étend entre 0.4μm et 0.8μm

3. le changement de maille cristalline et le travail sur les impuretés est une méthode utilisée pour changer la couleur des pierres précieuses