« **Supraconductivité** » - Janvier 2011, Tous documents autorisés, durée 3 heures

Cohérence de phase et d'amplitude dans les supraconducteurs à haute température critique

La transition entre l'état normal (N) et l'état supraconducteur (S) peut se décrire à partir du formalisme de Ginzburg – Landau. La différence de densité d'énergie libre entre ces deux états s'écrit alors (pour le système « supraconducteur + bobine ») :

$$\Delta F = F_s - F_N = \alpha|\psi|^2 + \frac{1}{2}\beta|\psi|^4 + \frac{1}{2m}\left|\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\psi - q\vec{A}\psi\right|^2 + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}$$

1) Rappelez comment α est relié à la longueur de cohérence ξ.
On écrit $\Psi = \Psi_\infty f(\vec{r})e^{i\theta(\vec{r})}$ où f est une fonction comprise entre 0 et 1, à quelle autre longueur $|\Psi_\infty|^2$ est-elle relié ? Exprimez β en fonction de ces deux longueurs.

2) Montrez que pour $\alpha|\psi|^2 + \frac{1}{2}\beta|\psi|^4 + \frac{1}{2m}\left|\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\psi - q\vec{A}\psi\right|^2 = \mu_0 H_c^2\left[-f^2 + \frac{f^4}{2} + \xi^2((\vec{\nabla}f)^2 + (\vec{\nabla}\theta - \frac{2\pi\vec{A}}{\Phi_0})^2\right]$ T<T$_c$

où H$_c$ est le champ critique thermodynamique [dont on précisera l'expression et la signification physique] et Φ_0 le quantum de flux.

3) On s'intéresse tout d'abord à la structure d'un vortex et, en coordonnée cylindrique (r,φ,z), on suppose que f ne dépend que de r, $\theta = \varphi$, et $\vec{A} = A(r)\vec{u}_\varphi$. Montrez que la 1^{ere} équation de Ginzburg - Landau peut alors s'écrire[1] :

$$f = f^3 - \xi^2(f'' + \frac{f'}{r}) + \frac{\xi^2}{r^2}(1 - \frac{\Phi}{\Phi_0})^2 f \quad \text{où le flux } \Phi = 2\pi A(r).r$$

4) Pour r tendant vers 0 (centre du vortex), on peut négliger Φ. On suppose que $f(r) \sim r^\gamma$, montrez que $\gamma=1$ est alors une solution acceptable pour l'équation Q3.

5) En multipliant la 1^{ere} équation de Ginzburg - Landau par ψ^*, montrez que

$$\iint (\alpha|\Psi|^2 + \beta|\Psi|^4 + \frac{1}{2m}\left|(\frac{\hbar\vec{\nabla}}{i} - q\vec{A})\Psi\right|^2)dS = 0,$$ en déduire que

$$\Phi_0 H_{c1} = 2\pi\mu_0 H_c^2 \int (b^2 + \frac{1}{2}(1-f^4))rdr \text{ avec } b = B/\sqrt{2}\mu_0 H_c$$

On peut alors montrer (après plusieurs intégrations par parties et en introduisant $\vec{B} = r\vec{o}t\vec{A}$) que

$$H_{c1} = \frac{2\pi\mu_0 H_c^2}{\Phi_0}\int_0^\infty r(1-f^2)dr$$ [on ne cherchera pas à démontrer ce résultat]

---

[1] $\vec{\nabla}F = \partial F/\partial r.\vec{u}_r + 1/r\partial F/\partial\varphi.\vec{u}_\varphi + \partial F/\partial z.\vec{u}_z$ et $\Delta F = \vec{\nabla}.\vec{\nabla}F = \partial^2 F/\partial r^2 + 1/r\partial F/\partial r + 1/r^2\partial^2 F/\partial\varphi^2$

Dans le cas de supraconducteurs « exotiques » tels que les supraconducteurs à haute température critique, on peut supposer que les variations spatiales de l'amplitude et de la phase du paramètre d'ordre ne sont pas déterminées par une seule longueur ξ mais deux : notée ξ (pour l'amplitude) et $\xi_\perp$ pour la phase. On pose $s = \xi_\perp/\xi$

6) L'équation déterminée en Q3 devient alors : $f = f^3 - \xi^2(f'' + \frac{f'}{r}) + \frac{\xi_\perp^2}{r^2}(1 - \frac{\Phi}{\Phi_0})^2 f$.

Quelle en est la conséquence sur la valeur de γ. On suppose que $f(r)=1$ pour $r > 2\xi$ (justifiez cette supposition). Tracez schématique l'évolution de f en fonction de r/ξ puis $r/\xi_\perp$ pour $s = 1$ et $s = 0.1$. Reportez également sur ce graphe la distribution du champ B associée au vortex.

Montrez (à partir de l'équation donnée en Q5) que $H_{c1}(s << 1) \sim s * H_{c1}(s = 1)$.

7) Au voisinage de H_{c2}, on peut prendre, en coordonnées cartésiennes (pour un champ parallèle à Oz), $f=f(x)$, $\theta=k.y$ et $A_y=\mu_0 H.x$ ($A_x= Az= 0$). Que devient la 1ere équation de Ginzburg - Landau dans ce cas pour $s=1$. Par analogie aux questions Q3 et Q5 que devient cette expression pour $s \neq 1$. En déduire (par analogie à l'équation de Schrödinger de l'oscillateur harmonique) la valeur de H_{c2}.

[Subsidiaire - 7') Au voisinage de H_{c2}, on pourrait également conserver la forme de Ψ choisie en Q3 et prendre $B = \mu_0 H_{c2}$, en déduire une expression du flux Φ et montrez que la formule obtenue en Q3 devient alors :

$$f'' + \frac{f'}{\rho} + \left[\frac{d^2}{2\xi\xi_\perp} + \left(\frac{\rho}{2} - \frac{s}{\rho}\right)^2\right] f = 0$$

où les dérivée première (f') et seconde (f'') de f sont désormais calculées par rapport à $\rho=r/L$ avec $L^2=d^2/2s$ et $d^2=\Phi_0/\pi\mu_0 H_{c2}$. On peut par ailleurs montrer que $f = \rho^s e^{-\rho^2/4}$, en déduire la valeur de H_{c2}.]

8) Tracez (sur le même graphe) schématique la dépendance en H de l'aimantation M pour $s = 1$ et $s = 0.1$.

9) Dans un supraconducteur, on peut définir un gap (Δ). A quoi ce gap fait-il référence et comment est-il relié à (a) T_c , (b) ξ dans le cadre de la théorie BCS.

Dans les supraconducteurs à haute température critique il existe un (pseudo-)gap $\Delta >> k_B T_c$ et on dispose alors de 2 échelles d'énergie dissociées qu'il est tentant d'associer à ξ et $\xi_\perp$. La température critique (mesurée expérimentalement) correspond alors à la perte de la cohérence de phase [le champ critique thermodynamique est donc proportionnelle à $1/\lambda\xi_\perp = 1/\lambda_0\xi$ où λ_0 est la longueur de pénétration pour $s =1$].

10) On peut montrer expérimentalement que $s \sim T_c^\alpha$, $\xi \sim T_c^\beta$ et $\lambda \sim T_c^\delta$ avec $\alpha = 1$, $\beta = -1$ et $\delta = -1$. En déduite les lois d'échelle (dépendance en T_c) pour $\kappa = \lambda/\xi$; H_{c1}, H_{c2}, $\mu_0 H_c^2/2$. Quelle seraient ces lois pour un supraconducteur BCS (justifiez pourquoi on peut prendre dans ce cas $\delta \sim 0$).